

MATEMATIKA DISKRETUA ETA ALGEBRA

Lehenengo zatia

[http ://www.sc.ehu.es/ccwalirx/docs/Materiala.htm](http://www.sc.ehu.es/ccwalirx/docs/Materiala.htm)

1. KALKULU PROPOSIZIONALA
2. PREDIKATU KALKULUA
3. MULTZOAK, OSOKOAK
4. ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK
5. GRAFOAK
6. ZUHAITZAK

F. Xabier Albizuri Irigoyen
257 bulegoa, Tel : 943015038
fx.albizuri@ehu.es

1. gaia : Kalkulu proposizionala

1 Logikarako sarrera

Logika izena grekotik dator : $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ -en esanahia hitza da (*verbum*), baina baita ere arrazoiketa, argumentua (*ratio*). Logika formala edo logika matematikoak arrazoiketaren lege formalak aztertzen ditu.

Har dezagun argumentu hau : “Euskaldunak pilotazaleak dira eta Joxe euskalduna denez pilotazalea da”. Argumentu hau logikoki baliozkoa izango da. Dagokion adierazpen sinbolikoa edo forma logikoa hau da :

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge Py \rightarrow Qy$$

Logika formalean ez da argumentuko osagaien esanahia kontsideratzen baizik argumentuaren forma. Beste argumentu hau ez da izango logikoki baliozkoa : “Euskaldunak pilotazaleak dira eta Joxe pilotazalea denez euskalduna da”. Ezta ere forma berdineko argumentu hau : “Espainolak zezenzaleak dira eta Luis zezenzalea denez espainola da”.

Adierazpen logiko bat baliozkoa den edo ez nola erabaki estudiantuko dugu, eta baita ere ikusiko ditugu argumentua baliozkoa dela frogatzeko teknikak. Logika formalean bi maila bereizten dira, *kalkulu proposizionala* eta *predikatuen kalkulu*, eta banaketa honen arabera garatuko dugu logika matematikoa gai hau eta hurrengoan.

2 Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Proposizioak esaldi edo perpausak dira : “Elurra beltza da”, “9 zenbaki lehena da”. Proposizio *bakunak* lokailuen (konektiben) bidez lotuz proposizio

konposatuak ditugu : “Elurra beltza da edo 9 zenbakia lehena da”. Hauek dira *lokailu* proposizionalak, bakoitzaren izena, ikurra eta nola irakurri bakoitza :

- Konjuntzioa, \wedge , “...eta ...”
- Disjuntzioa, \vee , “...edo ...”
- Implikazioa, \rightarrow , “...-k inplikutzen du ...”, “Baldin ...orduan ...”, “...soilik baldin ...”
- Koinplikazioa, \leftrightarrow , “...baldin eta soilik baldin ...”
- Ukapena, \neg , “Ez ...”

Lokailu hauek eta *aldagai proposizionalak*, $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$, erabiliko ditugu *adierazpenak* osatzeko, erregela hauek jarraituz : (1) Aldagai proposizionalak adierazpenak dira. (2) A adierazpena bada, $\neg A$ ere adierazpena da. (3) A eta B adierazpenak badira, $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ eta $A \leftrightarrow B$ ere adierazpenak dira.

A, B, C, \dots letrekin adierazpenak izendatuko ditugu. Identifikatzaileak deitzen zaie. Identifikatzaile ezberdinek adierazpen bera izenda dezakete.

Adierazpenetan *parentesiak* erabiliko ditugu, nola eraikiak izan diren jakiteko (adierazpen aritmetikoetan egiten denaren antzera).

Adibidea 1 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ edo $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ idatziko dugu eta inoiz ez $P \rightarrow Q \rightarrow R$. Eraiki aldagai proposizionaletatik bi adierazpen ezberdin hauek.

Parentesi gehiegi ez idazteko lokailuen arteko lehentasuna (prezedentzia) definituko dugu. Honela ordenatuko ditugu lokailuak, ezkerretik eskuinera lokailuaren lehentasuna handituz doalarik :

$$\begin{array}{l} \leftrightarrow \quad \wedge \quad \neg \\ \rightarrow \quad \vee \end{array}$$

Ezin badugu erabaki bi lokailutik zein sartu den lehendabizi adierazpenean, parentesirik ez dagoelako (edo parentesi guztiak ez daudelako), orduan lehentasun handiagoa duen lokailua bestea baino lehenago sartu behar da adierazpena eraikitzean.

Adibidea 2 *Komentzio honen arabera zein adierazpen da $P \rightarrow Q \wedge R$? Eta $\neg P \vee Q$? Eta $\neg\neg P \rightarrow Q$?*

Adibidea 3 *Eraiki $P \rightarrow (Q \vee R \rightarrow (R \rightarrow \neg P))$ adierazpena aldagai proposizionaletatik.*

Adierazpen bati azkena sartu den lokailuaren arabera deituko diogu : honela $P \rightarrow Q \wedge R$ adierazpena inplikazio bat dela esango dugu, $(\neg P \vee Q) \wedge R$ konjuntzioa, $\neg(P \rightarrow Q)$ ukapena, etab.

Kalkulu proposizionalean, proposizio bat emanik adierazpena idatziko dugu bere forma irudikatzeko. Azaldu dugunaren arabera, honela lortuko dugu proposizio konposatuari dagokion adierazpena : proposizio bakun bakoitza aldagai proposizional batekin ordezkatzeko dugu (aldagai bera proposizio bakunaren agerpen guztietan) eta lokailuentzat ikurrak idatziko ditugu.

Adibidez, “Elurra beltza izateak inpliketzen du 9 zenbaki lehena dela, eta elurra beltza da” proposizio konposatuari dagokion adierazpena $(P \rightarrow Q) \wedge P$ da.

3 Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Proposizio bat egiazkoa edo faltsua izan daiteke. Proposizioaren *egi balioa* da **t** (egiazkoa) edo **f** (faltsua) balioa. Proposizio konposatuaren egi balioa jakin dezakegu proposizio bakunen egi balioen funtzio bezala. Antzera aldagai proposizionalei **t** edo **f** balioak emanaz adierazpenaren egi balioa kalkula dezakegu egi taula hauen arabera :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	P	$\neg P$
t	t	t	t	t	t	t	f
t	f	f	t	f	f	t	f
f	t	f	t	t	f	f	t
f	f	f	f	t	t		

Ikusten dugunez, $P \wedge Q$ egiazkoa da soilik P eta Q biak egiazkoak direnean, $P \vee Q$ faltsua da soilik P eta Q biak faltsuak direnean, $P \rightarrow Q$ faltsua da soilik P egiazkoa izanik Q faltsua denean, $P \leftrightarrow Q$ egiazkoa da P eta Q -k egi balio berdina dutenean, faltsua bestela, eta azkenik $\neg P$ -ren egi balioa P -ren egi balioaren aurkakoa da.

Kalkuluak antzera egingo ditugu P eta Q aldagaien ordezkari beste aldagai edo adierazpen batzuk baditugu, *kontuan izanik nola eraikia izan den adierazpena* aldagai proposizionaletatik.

Adibidea 4 Osatu $P \rightarrow (Q \vee R \rightarrow (R \rightarrow \neg P))$ adierazpenaren egi taula.

Adierazpen baten egi taula nola eraiki jakin ondoren, baliozkotasunaren kontzeptua sartuko dugu.

Definizioa 1 *Adierazpen bat baliozkoa (edo tautologia) dela esango dugu bere egi taulako lerro guztietan egiazkoa bada, hau da aldagai proposizionalen egi balioentzako edozein esleipenerako adierazpena egiazkoa bada. Adierazpena ez da baliozkoa gutxienez lerroren batean faltsua bada. Adierazpena kontraesana da lerro guztietan faltsua bada.*

Adierazpen bat baliozkoa denean \models ikurra erabiliko dugu, $\models A$ idatziz A adierazpena baliozkoa bada. Kontuan izan ikur hau ez dela lokailu berri bat baizik laburdura bat.

Adibidea 5 *Aztertu adierazpen hauek baliozkoak diren : $P \rightarrow P$, $P \wedge Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$, $P \rightarrow (Q \vee R \rightarrow (R \rightarrow \neg P))$.*

Propietatea 1 *Adierazpen bat baliozkoa izanik, aldagai proposizional bat edo gehiago adierazpen batzurekin ordezkatzeko baditugu, aldagai bat leku guztietan adierazpen berarekin ordezkatzuz, adierazpen baliozkoa lortuko dugu.*

Adibidea 6 *$P \rightarrow P \vee Q$ baliozkoa denez, Propietatearen arabera A eta B izanik edozein adierazpen, $A \rightarrow A \vee B$ adierazpena baliozkoa da. Idatzi honelako adierazpen batzuk.*

Azter dezagun orain argumentuen egitura. Argumentu batean *premis*a batzuk ditugu, A_1, A_2, \dots, A_n , eta *ondorioa*, B . (Ondorengo definizioan A_1, A_2, \dots, A_n, B adierazpenentzako sarrera komuneko egi taula bakarra kontsideratuko dugu.)

Definizioa 2 *Esango dugu argumentu bat baliozkoa dela, hau da, A_1, A_2, \dots, A_n premisen baliozko ondorioa dela B baldin, premisa denak egiazkoak direnean ondorioa ere egiazkoa bada, egi taulako edozein lerrotan. Hau betetzen bada $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ idatziko dugu.*

Adibidea 7 *Aztertu $P \vee Q$ eta $\neg Q$ premisen baliozko ondorioa den P .*

Aurreko definizioetatik nabaria denez, $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ dugu baldin eta soilik baldin $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$.

4 Baliokidetasunak

Baliokidetasunaren nozioarekin jarraituko dugu, adierazpen batetik beste adierazpen baliokideak lortzeko erak aztertuz.

Definizioa 3 *A eta B adierazpenak baliokideak direla esango dugu, $A \equiv B$ idatziz, baldin $A \leftrightarrow B$ baliozko adierazpena bada, hau da, egi taulako edozein lerrotan A eta B-k egi balio berdina dadute.*

Kontuan izan \equiv ez dela lokailu berria baizik laburdura bat.

Ondorengo propietatean azpiadierazpenaren kontzeptua behar dugu. A adierazpena aldagai proposizionaletatik eraikitzean osatzen diren adierazpenei, A-ren azpiadierazpenak deituko diegu.

Propietatea 2 *A eta B baliokideak badira, eta C-ren azpiadierazpena bada A, D izanik C-n A-ren agerpen bat B-rekin ordezkatzuz lortua, orduan $C \equiv D$.*

Propietatea 3 *$A \equiv B$ izanik, A baliozkoa bada orduan B ere baliozkoa da.*

Propietatea 4 *Edozein A eta B adierazpenetarako :*

a) $A \equiv A$

b) baldin $A \equiv B$ orduan $B \equiv A$

c) baldin $A \equiv B$ eta $B \equiv C$ orduan $A \equiv C$

Bestalde, baliokidetasun-katea dugu baldin :

$$A_1 \equiv A_2 \text{ eta } A_2 \equiv A_3 \text{ eta } \dots \text{ eta } A_{n-1} \equiv A_n$$

Honela idatziko dugu era laburragoan :

$$A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \dots \equiv A_{n-1} \equiv A_n$$

Azkeneko propietatetik $A_1 \equiv A_n$ dugu.

Propietatea 5 *Baliokidetasuna mantendu egiten da aldagai proposizional bat edo gehiago adierazpen batzurekin ordezkatzean, aldagai bat leku guztietan adierazpen berarekin ordezkatzuz.*

Oinarrizko baliokidetasun batzuren zerrenda idatziko dugu. A, B, C izanik edozein adierazpen :

$\neg\neg A \equiv A$	Ukapen bikoitzaren legea
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	Trukatze legeak
$A \vee B \equiv B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	Elkartze legeak
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Banatzte legeak
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
$A \wedge A \equiv A$	Idenpotentzia legeak
$A \vee A \equiv A$	
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	De Morganen legeak
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	
$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Beste batzuk
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	

Adibidea 8 *Frogatu $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ baliokidetasuna egi taulan oinarrituz.*

Adibidea 9 *Baliokidetasun-katea osatuz, eta goian idatzi dugun zerrendako baliokidetasunak kontuan izanik, frogatu :*

- a) $P \wedge (P \vee Q \rightarrow Q) \equiv P \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee Q)$
- b) $P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$

Azkenik, esango dugu elkartze legeen arabera bi atal baino gehiagoko konjuntzio eta disjuntzioetan parentesirik ez dugula ipiniko atal hauen artean. Adibidez, $P \wedge \neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$.

5 Argumentuen baliozkotasunaren frogak

Argumentu bat baliozkoa dela frogatzeko, hau da, A_1, A_2, \dots, A_n premisen baliozko ondorioa dela B frogatzeko, definizioan aipatzen genuen egi taula egin beharrean, beste teknika batzuk erabiliko ditugu, arrazoiketa naturaletik hurbilago daudenak.

Honela egingo dugu argumentuaren baliozkotasunaren *froga formal* : dedukzioa hasteko, A_1, A_2, \dots, A_n premisak (egi taulako lerro batean) egiazkoak direlako hipotesia egingo dugu, ondoren hauetatik (egi taulako aipatutako

lerroan) egiazkoak diren adierazpenak deduzituko ditugu pausoz pauso eta azkenean B ondorioa deduzituz amaituko dugu froga.

Froga hauek egiterakoan batzutan teknika bereziak erabiliko ditugu :

- *reductio ad absurdum (r.a.a.)* : ondorioaren ukapena, $\neg B$, egiazkotzat hartuko dugu eta dedukzioarekin jarraituko dugu kontraesana lortu arte, azkenean ondorioztatuz B egiazkoa izan behar dela.
- *kasuzkako froga* : $A \vee B$ bi kasuren disjuntzioa badugu, disjuntzioa egiazkoa izanik, dedukzioa bi adarretan bananduko dugu, kasuetako bat A edo bestea B egiazkotzat hartuz adar bakoitzean ; bi adarretan adierazpen bera C deduzitzen badugu, orduan hasierako $A \vee B$ disjuntziotik ere deduzitzen da C adierazpena.
- *froga baldintzatua* : deduzitu beharreko adierazpena inplikazioa bada, $A \rightarrow B$, orduan A premisaren egiazkotasuna hipotesi gehigarritzat har dezakegu, ondoren dedukzioarekin jarraituz B lortu arte, azkenik esango dugularik $A \rightarrow B$ deduzigarria dela lehenagoko hipotesietatik. (Hau argi dago, A faltsua den kasuan inplikazioa egiazkoa da, eta A egiazkoa den kasuan froga baldintzatuaren arabera B egiazkoa da beraz inplikazioa ere bai.)

Dedukzioa garatzerakoan deduzitu ditugun eta deduzitu behar ditugun adierazpenen lokailuen arabera jokatuko dugu. *Dedukzio erregela* hauek ditugu :

- $A \wedge B$ egiazkoa bada, orduan bai A eta bai B egiazkoak dira (*Simplifikazio Konjuntiboa*) ; alderantziz $A \wedge B$ egiazkoa dela deduzitzeko A eta B biak izan behar dira egiazkoak (*Konbinazio Konjuntiboa*).

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \quad \frac{A}{A \wedge B}$$

- $A \vee B$ deduzitzeko nahikoa da A edo B , bietako bat, egiazkoa izatea (*Adizio Disjuntiboa*). Bestalde, $A \vee B$ egiazkoa bada, eta $\neg A$ ere bai orduan B egiazkoa da, aldiz $\neg B$ egiazkoa bada orduan A egiazkoa da (*Silogismo Disjuntiboa*).

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \quad \frac{A \vee B}{\neg A} \quad \frac{A \vee B}{\neg B}$$

- $A \rightarrow B$ egiazkoa bada, eta A ere bai orduan B egiazkoa da (*Modus Ponens*), aldiz $\neg B$ bada egiazkoa orduan $\neg A$ egiazkoa da (*Modus Tol-*

lens).

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \qquad \frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

- $A \rightarrow B$ eta $B \rightarrow C$ egiazkoak badira, $A \rightarrow C$ ere bai (*Silogismo Hipotetikoa*).

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

- $A \leftrightarrow B$ egiazkoa da baldin eta soilik baldin $A \rightarrow B$ eta $B \rightarrow A$ egiazkoak badira.

Azkenik, behar izanez gero,

- adierazpen *baliokidetasunak* ere erabiliko ditugu argumentuaren baliokotasunaren dedukzioan

Adibide batzuren bidez azalduko dugu hau guztia nola erabili argumentu baten baliokotasuna frogatzeko.

Adibidea 10 *Frogatu argumentu baliokoak direla :*

- a) $\neg R \rightarrow \neg P, R \rightarrow S, \neg T \vee \neg S, T \vee U, \neg U \models \neg P$
- b) $P \vee Q, \neg P \vee R \models Q \vee R$
- c) $P \rightarrow Q, P \rightarrow R \models P \rightarrow Q \wedge R$
- d) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \wedge S, \neg R \vee \neg T \vee U, P \wedge T \models U$
- e) $\neg P \vee \neg Q \rightarrow R \wedge S, R \rightarrow T, \neg T \models P$
- f) $U \rightarrow R, R \wedge S \rightarrow P \vee T, Q \rightarrow U \wedge S, \neg T \models Q \rightarrow P$

2. gaia : Predikatu kalkulua

1 Predikatu kalkuluko adierazpenak

Kalkulu proposizionaleko sinbolismoa zabalduko dugu. *Objektuak* (edo gizabanakoak) eta *predikatuak* kontsideratuko ditugu. Adibidez “Sokrates hilkorra da” proposizioan “Sokrates” objektua (gizabanakoa) eta “_ hilkorra da” (norbait hilkorra izatea) predikatua ditugu. Hizkuntza matematikoa idatzitako proposizioak ere har ditzakegu, “ $2 < 3$ ” proposizioan 2 eta 3 objektuak dira eta “ $_ < _$ ” predikatua. Identifikatu ditugun bi predikatu hauek 1-lekuko eta 2-lekuko predikatuak dira hurrenez hurren.

Lokailu proposizionalak ere erabiliko ditugu proposizioak osatzeko : “Sokrates hilkorra bada orduan Platon hilkorra da”, “ $2 < 3 \wedge 3 < 1$ ”. Hau da, predikatu kalkulua bere barnean hartzen du kalkulua proposizionalaren formalismoa.

Bestalde predikatu kalkuluan *aldagai indibidualak* (objektuentzako aldagaiak) erabiliko ditugu, x, y, z, \dots , predikatuen lekuetan ipiniko ditugunak.

Baita ere bi sinbolo logiko berri sartuko ditugu : \forall , *zenbatzaile unibertsala*, eta \exists , *zenbatzaile existentziala*. *Proposizio* hauek ditugu :

- “ $\exists x(x < 2)$ ”, “Existitzen da x -en bat zeinentzat $x < 2$ ”
- “ $\forall x(x < 2)$ ”, “Edozein x -entzat $x < 2$ ”, “ x guztientzat $x < 2$ ”

Aldagai indibidual batek ez duenean zenbatzailerik, adibidez “ $x < 2$ ” idaztean, hau proposizioa da x aldagaiak *objektu zehatz bat izendatzen badu*, adibidez 1 zenbakia, “ $1 < 2$ ” alegia, bestela zenbatzailea sartu behar dugu proposizioa izan dadin, “ $\forall x(x < 2)$ ”.

Predikatu kalkuluko adierazpenak osatzeko erabiliko ditugu aldagai proposizionalak, P, Q, R, \dots , eta predikatu aldagaiak, P_-, Q_-, \dots , 1-lekukoak,

P_{--}, Q_{--}, \dots , 2-lekukoak, etab.

Erregela hauen bidez definituko dugu adierazpena eta baita ere aldagai indibidual *askeak* eta *lotuak* :

1. Aldagai proposizional bat adierazpena da. n -lekuko predikatu aldagaia, ondoren n aldagai indibidual dituela, adierazpena da. Erregela honen arabera osatutako adierazpenei *adierazpen primarioak* deituko diegu. Hauetan agertzen diren aldagai indibidualak askeak dira.
2. A adierazpena bada, $\neg A$ ere adierazpena da. A -ko aldagai indibidual askeak $\neg A$ -n ere askeak dira eta A -n lotuak direnak $\neg A$ -n ere lotuak dira.
3. A eta B bi adierazpen badira, ez daukagularik batean askea eta bestean lotua den aldagai indibidualik, orduan adierazpenak dira $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ eta $A \leftrightarrow B$. Adierazpen berri hauetako aldagai indibidualak askeak edo lotuak dira A eta B -n diren modu berean.
4. A adierazpenean x aldagai askea badago orduan $\forall xA$ eta $\exists xA$ adierazpenak dira. Esango dugu $\forall x$ edo $\exists x$ zenbatzaileak A adierazpena lotzen duela, x aldagaia lotua da $\forall xA$ eta $\exists xA$ adierazpenetan. $\forall xA$ eta $\exists xA$ -ko beste aldagai indibidualak askeak edo lotuak dira A adierazpenean diren modu berean. (Erregela honetan x -en ordez beste aldagai bat izan daiteke, y, z, \dots)

Parentesiak ipintzerakoan kalkulu proposizionaleko komentzioarekin jarraituko dugu, zenbatzaileek ukapenaren lehentasun (prezedentzia) berdina izango dutelarik.

Adibidea 1 Zein da $\forall xPx \vee Q$ adierazpena? Ken ditzakegu $\forall x(Px \vee Q)$ adierazpeneko parentesiak?

Adibidea 2 Eraiki $Px \rightarrow \forall z\exists yQyz \wedge \forall y(Rxy \vee S)$ adierazpen primarioetatik. Osatzen den adierazpen bakoitzean esan zein aldagai indibidual diren askeak eta zein lotuak.

Adibidea 3 Adierazpena da $Px \wedge \forall xQx$?

A, B, C, \dots identifikatzaileak erabiliko ditugu edozein adierazpen izendatzeko, $A(x), B(x), \dots$ erabiliko ditugu x aldagai askea dutenak izendatzeko, agian beste aldagai aske edo lotu batzuk izanik adierazpenak.

Adibidea 4 Zein identifikatzaile erabil ditzakegu $Px \wedge \exists yQyz$ izendatzeko ?

Atal hau burutzeko, hau litzateke predikatu kalkulan proposizio bati dagokion adierazpena lortzeko bidea : proposizio bakun bakoitza aldagai proposizional batekin ordezkatzeko dugu, n -lekuko predikatu bakoitza n -lekuko predikatu aldagai batekin, *objektu (edo gizabanako) bakoitza aldagai individual aske batekin*, eta lokailu eta zenbatzaileentzat ikurrak (eta aldagai lotuak) idatziko ditugu.

Adibidea 5 *Lortu proposizio bat, $\forall xPx \rightarrow Py$ adierazpena dagokiona.*

2 Baliozko adierazpenak

Predikatu kalkulurako adierazpen baliozkoaren kontzeptua definituko dugu. Lehenik \mathcal{U} , *objektuen unibertsoa* kontsideratzen dugu, \mathcal{U} izanik multzo ez hutsa. Predikatu baten lekuetan \mathcal{U} -ko objektuak ipiniz proposizioa daukagu, eta hau egiazkoa edo faltsua izango da aukeratu ditugun objektuen eta predikatuaren arabera. Horregatik adierazpen baten egi taula eraikitzeko *funtzio logikoak* definitu behar ditugu, n -lekuko funtzio logikoak honelakoak izanik :

$$\varphi : \mathcal{U} \times \dots \times \mathcal{U} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$$

Adibidea 6 *Idatzi : (a) 3 objektuko unibertsorako 1-lekuko funtzio logikoak, (b) objektu bateko unibertsorako 2-lekuko funtzio logikoak, (c) 2 objektuko unibertsorako 2-lekuko funtzio logikoak.*

\mathcal{U} objektu unibertsoa aukeratu ondoren, adierazpenaren egi taulan esleipen hauek egingo ditugu lerro bakoitzean :

- aldagai proposizional bakoitzari \mathbf{t} edo \mathbf{f} egi balioa
- n -lekuko predikatu aldagai bakoitzari n -lekuko funtzio logikoa
- aldagai aske bakoitzari \mathcal{U} -ko objektu bat

Egi taulako lerro batean adierazpenaren egi balioa kalkulatzeko jakin behar dugu zenbatzaile existentzial eta unibertsalarekin zer egin. $\forall xA(x)$ edo $\exists xA(x)$ -en egi balioa kalkulatzeko taula laguntzailea egingo dugu, \mathcal{U} -ko objektu bakoitzarentzat $A(x)$ -en egi balioa kalkulatzuz x aldagaia objektuaz ordezkatzean. $\forall xA(x)$ egiazkoa izango da baldin $A(x)$ egiazkoa bada \mathcal{U} -ko objektu guztientzat, eta honela ez bada, faltsua. $\exists xA(x)$ egiazkoa izango da baldin $A(x)$ egiazkoa bada \mathcal{U} -ko objektu batentzat gutxienez, eta honela ez bada, faltsua.

Azkenik esango dugu adierazpenaren egi taula egiterakoan \mathcal{U} unibertsoko objektuak zein diren ez zaigula interesatzen, kopurua $|\mathcal{U}|$ bakarrik. Normalean zenbakiak erabiliko ditugu, $|\mathcal{U}| = n$ bada $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, n\}$ hartuz.

Adibidea 7 (1) $P_y \vee \forall x(Px \rightarrow Q)$ adierazpenaren egi taula bi objektuko unibertsoarako, (2) $\forall x(\exists yPy \rightarrow Px) \wedge Pz$ adierazpenaren egi taula bi objektuko unibertsoarako.

Adierazpena emanik, honen *interpretazio* bat definitzen dugu unibertsoa aukeratuz eta aldagai proposizional bakoitzaren egi balioa, predikatu aldagai bakoitzarentzat funtzio logikoa eta aldagai aske bakoitzarentzat objektua finkatuz.

Definizioa 1 *A adierazpena baliozkoa dela esango dugu baldin edozein unibertsoarako egi taulan adierazpena egiazkoa bada lerro guztietan. Hau da, baldin egiazkoa bada edozein interpretaziorako.*

Adierazpen batek infinitu egi taula ditu, unibertso bakoitzerako bat ($|\mathcal{U}| = 1, 2, \dots$). Adierazpena *baliozkoa* dela frogatzeko arrazoiketa generikoa egin behar dugu : \mathcal{U} zehaztu gabe, egi taulako edozein lerrotan \mathbf{t} dugula frogatu behar da. Aldiz, adierazpena *ez baliozkoa* dela frogatzeko \mathcal{U} konkretu baten egi taulako lerro batean \mathbf{f} lortzea nahikoa da. Nabaria denez kalkulu proposizionaletik ezberdintasun handia dugu.

Adibidea 8 *Frogatu $\forall x \exists y Pxy \rightarrow \exists y \forall x Pxy$ ez dela baliozkoa.*

3 Baliokidetasunak eta baliozko argumentuak

Predikatu kalkulan mantentzen da baliokidetasunaren definizioa, A eta B baliokideak dira, $A \equiv B$, baldin $A \leftrightarrow B$ baliozkoa bada, hau da, edozein unibertsoarako egi taulan A eta B -k egi balio berdina dute lerro bakoitzean. Baliokidetasun batzuren zerrenda egingo dugu. Edozein adierazpen $A(x)$, $B(x)$ eta $A(x, y)$ -rako :

$$\begin{aligned} \neg \exists x A(x) &\equiv \forall x \neg A(x) \\ \neg \forall x A(x) &\equiv \exists x \neg A(x) \\ \forall x \forall y A(x, y) &\equiv \forall y \forall x A(x, y) \\ \exists x \exists y A(x, y) &\equiv \exists y \exists x A(x, y) \\ \forall x (A(x) \wedge B(x)) &\equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \\ \exists x (A(x) \vee B(x)) &\equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \end{aligned}$$

Kontuan izan unibertsala banakorra dela konjuntziorako baina ez disjuntziorako; eta existentziala banakorra da disjuntziorako baina ez konjuntziorako. Bestalde, baldin A adierazpenak ez badu x askerik :

$$\begin{aligned}\forall x(A \wedge B(x)) &\equiv A \wedge \forall xB(x) \\ \forall x(A \vee B(x)) &\equiv A \vee \forall xB(x) \\ \exists x(A \wedge B(x)) &\equiv A \wedge \exists xB(x) \\ \exists x(A \vee B(x)) &\equiv A \vee \exists xB(x)\end{aligned}$$

Adibidea 9 *Frogatu :*

$$a) \exists x(Px \vee Qx) \equiv \exists xPx \vee \exists xQx \text{ (eta ondorioz } \exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)).$$

$$b) \neg \exists xPx \equiv \forall x\neg Px$$

Kalkulu proposizionalean bezala, predikatu kalkuluan ere baliokidetasun berriak lortzeko *baliokidetasun kateak* egingo ditugu oinarritzko baliokidetasunak erabiliz, goian idatzi dugun zerrendako eta kalkulu proposizionaleko baliokidetasunak erabiliz.

Argumentu baliozkoen definizioa ere antzekoa da orain, edozein unibertsorako egi taulan premisak egiazkoak badira lerroren batean orduan ondorioak egiazkoa izan behar du. Argumentuen baliozkotasunaren *froga formal* ere lehen bezala egingo dugu, baina orain zenbatzaileak eta aldagai indibidualak kontuan izan behar ditugu. Dakigunez, argumentuaren premisa eta ondorioko aldagai indibidual askeek objektu (edo gizabanako) konkretuak izendatzen dituzte. Oro har, dedukzioan zehar zenbatzaileak kenduko ditugu, kalkulu proposizionaleko dedukzio erregelekin jarraituko dugu dedukzioa, eta azkenik behar diren zenbatzaileak sartuko ditugu.

Existentzial bat kentzen dugun bakoitzean objektu konkretu bat izendatuko duen aldagai berria idatziko dugu (a , b etab). Unibertsal bat kentzean bi aukera ditugu : (a) zenbatzailearen aldagaiaren ordez objektu konkretu bat izendatzen duen aldagaia idatzi, (b) zenbatzailearen aldagaia utzi edo beste bat idatzi baina adieraziz aldagai honek unibertsoko edozein objektu izendatuz mantentzen dela egiazkotasuna. Zenbatzaileak sartzerakoan bakoitzaren egiazkotasunaren definizioaren arabera sartuko ditugu. Zenbatzaileak kendu eta sartzerakoan, deduzitu nahi dugun adierazpenaren arabera aukeratuko ditugu aldagaiak.

Dedukzio batzuk egingo ditugu.

Adibidea 10 *Frogatu argumentu hauek baliozkoak direla :*

- a) $\forall x(Px \rightarrow Qx), Py \models Qy$
- b) $\neg Ry, \forall x(Px \rightarrow Qx), \forall x(Qx \rightarrow Rx) \models \neg Py$
- c) $\forall x(Qx \vee Rx \rightarrow \neg Px), Py \models \neg Ry$
- d) $\forall xPx, \forall x(Px \rightarrow Qx) \models \forall xQx$
- e) $\forall x(Px \vee Qx), \forall x(\neg Px \wedge Qx \rightarrow Rx) \models \forall x(\neg Rx \rightarrow Px)$
- f) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \models \forall x(\neg Px \rightarrow \neg Sx)$
- g) $\forall x(Px \rightarrow Qx), Py \models \exists xQx$
- h) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models \exists xQx$
- i) $\exists x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models \exists xQx$??
- j) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models Qy$??

3. gaia : Multzoak eta osokoak

1 Multzoak eta azpimultzoak

Multzoa objektu batzuren bilduma bezala defini dezakegu, objektu hauek multzoaren *elementuak* direlarik. Ez dugu formalki definituko multzoa eta kontzeptu primitibotzat hartuko dugu.

Maiuskulak erabiliko ditugu multzoak izendatzeko : A, B, C, \dots ; eta minuskulak elementuak izendatzeko : x, y, z, \dots . Baldin x A -ko elementua bada $x \in A$ idatziko dugu (“ x barne A ” irakurriz), $x \notin A$ ez bada A -koa.

Multzoa bi eratara defini dezakegu :

- multzoko elementu guztiak emanaz,
- multzoko elementuek betetzen duten propietatea adieraziz.

Unibertsoa deituko diogu testuinguru batean kontsideratzen ditugun elementu guztien multzoari, \mathcal{U} idatziz.

Adibidea 1 (a) Idatzi A multzoa, lehenengo bost osoko positiboen multzoa, aipatutako bi eratan. Idatzi A berriz unibertsoa osokoen multzoa bada, $\mathcal{U} = \mathbf{Z}$.
(b) Idatzi osoko bikoitien multzoa, B .

Adibidean ikusten dugunez, multzo *finituak* eta *infinituak* ditugu. Multzo finitu bateko elementuen kopurua $|A|$ idatziz adieraziko dugu eta A -ren *kar-dinala* edo tamaina deituko diogu. Bi multzo berdinak dira, $A = B$, elementu berak badituzte. Multzo batean ordena ez da kontuan hartzen, eta multzoko elementuak ematean ez ditugu errepikatuko.

Definizioa 1 C multzoa D multzoaren azpimultzoa dela esango dugu, $C \subseteq D$ (“ C parte D ”), baldin edozein x -erako :

$$x \in C \Rightarrow x \in D$$

Baldin $C \subseteq D$ eta $C \neq D$, esango dugu D -ren azpimultzo propioa dela C , $C \subset D$ idatziz.

Partekotasuna eta oro har multzoen arteko erlazioak irudikatzeko *Venn diagramak* erabiliko ditugu.

Multzo hutsa elementurik ez duen multzoa da, $\phi = \{\}$, beraz $|\phi| = 0$. Edozein A -rako $\phi \subseteq A$ dugu.

Definizioa 2 A -ren potentzia multzoa, $\mathcal{P}(A)$, deituko diogu A -ren azpimultzo guztien bildumari.

A multzo finitua emanik $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, non $n = |A|$.

Adibidea 2 Idatzi $C = \{1, 2, 3\}$ multzoaren potentzia multzoa. Arrazoitu azpimultzo kopurua.

Multzo batzuek notazio berezia dute : \mathbf{Z} zenbaki osoak, \mathbf{Z}^+ osoko positiboak, $0 \notin \mathbf{Z}^+$, \mathbf{R} errealak, \mathbf{Q} arrazionalak, \mathbf{C} konplexuak, etab.

2 Multzo eragiketak

Multzoen arteko eragiketak definituko ditugu.

Definizioa 3 $A, B \subseteq \mathcal{U}$ multzoak emanik,

a) A eta B -ren bildura :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ edo } x \in B\}$$

b) A eta B -ren ebakidura :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ eta } x \in B\}$$

Definizioa 4 A eta B multzoak disjuntuak direla esango dugu baldin elementu komunik ez badute, $A \cap B = \phi$.

Definizioa 5 $A \subseteq \mathcal{U}$ multzoaren osagarria :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ eta } x \notin A\}$$

Definizioa 6 $A, B \subseteq \mathcal{U}$ emanik, A -ren B -rekiko osagarria :

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ eta } x \notin A\}$$

Adibidea 3 *Marraztu eragiketa hauei dagozkien Venn diagramak.*

Multzo teoriako lege hauek ditugu :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan-en legeak
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	
$A \cap B = B \cap A$	Trukatze legeak
$A \cup B = B \cup A$	
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Elkartze legeak
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Banatze legeak
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$A \cup \phi = A$	Identitate legeak
$A \cap \mathcal{U} = A$	
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Menpekotasun legeak
$A \cap \phi = \phi$	

Lege hauek kalkulu proposizionaleko baliokidetasun legeekin parekatu ditza-kegu, frogatzerakoan ikusiko dugunez.

Adibidea 4 *Frogatu $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

3 Zatiketa algoritmoa : zenbaki lehenak

Esango dugu $a \neq 0$ osokoak b osokoa zatitzen duela, $a | b$ idatziz, baldin existitzen bada n osokoa $b = na$ izanik; honela bada esango dugu a b -ren *zatitzailea* dela, eta b a -ren *multiploa*.

Adibidea 5 $2 | 6, 7 | -21, 7 | 20$?

Propietatea 1 *Edozein osoko a, b, c emanik (eta zatitzailea beti ez nulua izanik) :*

- (a) $1 | a, a | a, a | 0$.
- (b) Baldin $a | b$ eta $b | a$ orduan $a = \pm b$.
- (c) Baldin $a | b$ eta $b | c$ orduan $a | c$.
- (d) Baldin $a | b$ orduan $a | bx$, edozein osoko x -erako.
- (e) Baldin $a | b$ eta $a | c$ orduan $a | bx + cy$, edozein osoko x, y -rako (b eta c -ren konbinazio lineal bat da $bx + cy$).

Froga. (a) Lehenik $a = a \cdot 1$ beraz $1 \mid a$. Antzera $a = 1 \cdot a$ beraz $a \mid a$. Eta $0 = 0 \cdot a$ beraz $a \mid 0$.

(b) Hipotesiak dio $a \mid b$ eta $b \mid a$, hau da, $b = m a$ eta $a = n b$, non m, n osokoak diren, a eta b ez nuluak izanik $|b| \geq |a|$ eta $|a| \geq |b|$ dugu, beraz $a = \pm b$.

(c) Hipotesia da $a \mid b$ eta $b \mid c$, hau da, $b = m a$ eta $c = n b$, non m, n osokoak diren, beraz $c = n m a$, non $n m$ osokoa den, beraz $a \mid c$.

(d) Honen froga (e)ren frogaren kasu berezia da.

(e) Hipotesia $a \mid b$ eta $a \mid c$ da, $b = m a$ eta $c = n a$, non m, n osokoak diren, honela $b x + c y = m a x + n a y = (m x + n y) a$ dugu, non $m x + n y$ osokoa den, beraz $a \mid b x + c y$. \diamond

Osoko positibo bat, $n > 1$, zenbaki lehena dela esango dugu baldin ez badu zatitzaile positiborik, 1 eta n izan ezik; lehena ez bada *konposatua* deituko diogu.

Zatiketa algoritmoaren teorema ikusiko dugu ondoren, lehenik adibidea eginez.

Adibidea 6 *Zatitu 30a 7arekin.*

Teorema 1 (*Zatiketa algoritmoa.*) *Izan bitez a eta b osokoak, non $b > 0$, orduan existitzen dira q eta r osokoak, bakarrak, hau betzen delarik :*

$$a = q b + r, \quad \text{non } 0 \leq r < b$$

Froga. Azter dezagun $a \geq 0$ kasua eta kontsideratu multzo hau :

$$S = \{a - t b \mid t \in \mathbf{Z} \text{ eta } a - t b \geq 0\}$$

S ez da hutsa (adibidez $a - 0 b \geq 0$). Izan bedi S -ko osoko txikiena r :

$$r = a - q b, \quad r \geq 0$$

non q osoko bat den.

Frogatuko dugu $r < b$ dela. Eman dezagun (r.a.a.) $r \geq b$ dela, $q' = q + 1$ hartzen badugu :

$$a - q' b = a - (q + 1) b = a - q b - b = r - b \geq 0$$

beraz $a - q' b \in S$, eta $a - q' b = r - b < r$ izanik, r ez litzateke S -ko osoko txikiena, kontraesana r -ren definizioarekin. Ondorioz $r < b$.

Orain q eta r bakarrak direla frogatuko dugu. Baldin $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$, non $0 \leq r_1, r_2 < b$, hau dugu :

$$(q_1 - q_2) b = r_2 - r_1$$

hemendik $|q_1 - q_2| b = |r_2 - r_1| < b$, beraz $|q_1 - q_2| = 0$ izango da, ondorioz $q_1 = q_2$, eta baita $|r_2 - r_1| = 0$ ere, hau da, $r_1 = r_2$. \diamond

Adibidea 7 (a) *Zatitu 21a 7arekin, baita 22a ere.* (b) *Zatitu -43a 8arekin.*

4 Zatitzaile komun handiena

Izan bitez a, b eta $c \neq 0$ osokoak, esango dugu a eta b -ren zatitzaile komuna dela c baldin $c | a$ eta $c | b$.

Definizioa 7 *Izan bitez $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$, esango dugu a eta b -ren zatitzaile komun handiena dela c hau betetzen bada :*

- (i) *a eta b -ren zatitzaile komuna da c ,*
- (ii) *baldin $d | a$ eta $d | b$ orduan $d | c$, edozein $d \in \mathbf{Z}^+$ -rako.*

Idazkera hau erabiliko dugu zatitzaile komun handienarentzat, $c = \text{zkh}(a, b)$.

Adibidea 8 (a) *Zein da 6a eta 10aren zatitzaile komun handiena ?* (b) *Zein da multzo honetako osoko txikiena ?*

$$S = \{6s + 10t \mid s, t \in \mathbf{Z} \text{ eta } 6s + 10t > 0\}$$

Teorema 2 *Izan bitez $a, b \in \mathbf{Z}^+$, orduan existitzen da, eta bakarra da, a eta b -ren zatitzaile komun handiena. Izan bitez $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$, non $c | a$ eta $c | b$, orduan : $c = \text{zkh}(a, b)$ baldin eta soilik baldin existitzen badira x, y osokoak $c = ax + by$ izanik.*

Froga. Kontsidera dezagun multzo hau :

$$S = \{as + bt \mid s, t \in \mathbf{Z} \text{ eta } as + bt > 0\}$$

Multzoa ez da hutsa. Izan bedi S -ko osoko txikiena c . Ikusiko dugu a eta b -ren zatitzaile komun handiena dela.

Lehenik c zatitzaile komuna dela frogatuko dugu. Alde batetik $c \mid a$, honela ez balitz (r.a.a.), zatiketa algoritmotik hau genuke :

$$a = qc + r, \quad \text{non } 0 < r < c$$

eta r osokoa, c baino txikiagoa, S -koa litzatekeela deduzituko dugu. S multzokoa izanik c , orduan $c = ax + by$, non $x, y \in \mathbf{Z}$, beraz

$$r = a - qc = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy)$$

hau da $r \in S$. Ondorioz c ez litzateke S -ko osoko txikiena, kontraesana c -ren definizioarekin. Orduan $c \mid a$ bete behar da. Antzera arrazoituz $c \mid b$ dugu.

Gainera, edozein $d \in \mathbf{Z}^+$ -rako, baldin $d \mid a$ eta $d \mid b$, nola $c = ax + by$ den, $d \mid c$ betetzen da. Beraz a eta b -ren zatitzaile komun handiena da c .

Zatitzaile komun handiena bakarra dela frogatuko dugu : a eta b -ren zatitzaile komun handienak balira c_1 eta c_2 , orduan $c_1 \mid c_2$ eta $c_2 \mid c_1$, hemendik $c_1 = c_2$, positiboak direnez.

Azkenik, izan bitez $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$, non $c \mid a$ eta $c \mid b$. Baldin $c = \text{zkh}(a, b)$, ikusi dugunez $c = ax + by$. Alderantziz, baldin existitzen badira x, y osokoak $c = ax + by$ izanik, honela frogatuko dugu $c = \text{zkh}(a, b)$ dela : hasteko c zatitzaile komuna da, bestalde edozein $d \in \mathbf{Z}^+$ -rako baldin $d \mid a$ eta $d \mid b$ orduan $d \mid ax + by$, hau da, $d \mid c$. \diamond

Baldin $\text{zkh}(a, b) = 1$ esango dugu a eta b *erlatiboki lehenak* direla.

Zatitzaile komun handiena kalkulatzeko *algoritmo euklidearra* dugu. Izan bitez a eta b osoko positiboak :

- a zatitu b -rekin : hondarra $r_1 > 0$
- b zatitu r_1 -ekin : hondarra $r_2 > 0$
- r_1 zatitu r_2 -rekin : hondarra $r_3 > 0$
- r_2 zatitu r_3 -rekin : hondarra $r_4 > 0$
- ...
- r_{k-1} zatitu r_k -rekin : hondarra 0

$$\text{zkh}(a, b) = r_k$$

Adibidea 9 *Kalkulatu $\text{zkh}(250, 111)$ eta $\text{zkh}(1820, 231)$, eta lortu dagozkien konbinazio linealak.*

5 Aritmetikako teorema nagusia

Propietatea 2 *Izan bitez $a, b \in \mathbf{Z}^+$ eta p osoko lehena. Baldin $p \mid a b$ orduan $p \mid a$ edo $p \mid b$.*

Froga. Hipotesizat dugu $p \mid a b$. Bi kasu bereiziko ditugu. Lehenengo kasuan, baldin $p \mid a$, betetzen da inplikazioaren ondorioa. Beste kasuan, baldin $p \nmid a$, frogatuko dugu $p \mid b$ betetzen dela. Lehena denez p , kasu honetan $\text{zkh}(p, a) = 1$, ondorioz existituko dira x, y osokoak zeinentzat

$$1 = p x + a y$$

Berdintza b -rekin biderkatuz eta berrordenatuz,

$$b = p(b x) + (a b) y$$

Dakigunez $p \mid p$ eta $p \mid a b$, beraz

$$p \mid p(b x) + (a b) y$$

hau da, $p \mid b$. Bi kasuetatik $p \mid a$ edo $p \mid b$. \diamond

Teorema 3 (*Aritmetikako teorema nagusia.*) *Edozein osoko $n > 1$ idatz dezakegu zenbaki lehenen biderkadura bezala, honi deitzen diogu faktORIZAZIO lehena. FaktORIZAZIO lehena bakarria da, ordena kontuan hartu gabe.*

FaktORIZAZIOAREN existentzia frogatzeko nahikoa da zenbaki lehenaren definitzioa erabiltzea. FaktORIZAZIOA bakarria dela frogatuko dugu aurreko propietatean oinarrituz.

Adibidea 10 *Kalkulatu 980 220 osokoaren faktORIZAZIO lehena.*

6 Multiplo komun txikiena

Izan bitez $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$, esango dugu a eta b -ren multiplo komuna dela c baldin a -ren multiploa eta b -ren multiploa bada c . Baldintza hau betetzen duen osoko txikienari deituko diogu a eta b -ren multiplo komun txikiena, $\text{mkt}(a, b)$. Bi propietate aipatuko ditugu, hauen frogak egin gabe.

Propietatea 3 *Baldin $c = \text{mkt}(a, b)$, eta a eta b -ren multiplo komuna bada d , orduan $c \mid d$.*

Propietatea 4 *Berdintza hau betetzen da :*

$$a b = \text{mkt}(a, b) \cdot \text{zkh}(a, b)$$

4. gaia : Funtzioak eta erlazioak

1 Funtzioak

A multzotik B multzorako f funtzioa edo aplikazioa deituko diogu A -ko elementu bakoitzari B -ko elementu bat, eta *bakarra*, elkartzen dion legeari, $f : A \rightarrow B$ idatziz. Baldin $a \in A$ elementuari f funtzioak $b \in B$ elkartzen badio $f(a) = b$ idatziko dugu eta esango dugu a -ren *irudia* b dela.

Adibidea 1 Irudikatu $A = \{a, b, c, d, e\}$ multzotik $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ multzorako funtzio bat.

f funtzioaren irudia deituko diogu A -ko elementuen f -ren bidezko irudiek osatzen duten B -ko azpimultzoari, $f(A)$ idatziz. Antzera, $A' \subseteq A$ emanik, A' -ren irudia hau da :

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$$

Adibidea 2 Aurreko adibidean lortu funtzioaren irudia eta $\{b, c, d\}$ azpimultzoaren irudia.

Definizioa 1 $f : A \rightarrow B$ funtzioa *injektiboa* da baldin B -ko elementu bakoitzak gehienez behin agertzen bada A -ko elementuen iruditzat, hau da, baldin edozein $a_1, a_2 \in A$ -rako :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Adibidea 3 a) Irudikatu $A = \{a, b, c, d\}$ multzotik $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ multzorako funtzio injektiboa.

b) Aztertu injektiboa den $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$

c) Aztertu injektiboa den $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^4 - x$

Definizioa 2 $f : A \rightarrow B$ funtzioa suprajektiboa da baldin $f(A) = B$, hau da, edozein $b \in B$ -rako badago gutxienez $a \in A$ bat $f(a) = b$ izanik.

Adibidea 4 a) Irudikatu $A = \{a, b, c, d, e\}$ multzotik $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ multzorako funtzio suprajektiboa.

b) Aztertu suprajektiboa den $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $h(x) = 3x + 1$

c) Aztertu suprajektiboa den $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$

Definizioa 3 Funtzio bat bijektiboa dela esango dugu baldin injektiboa eta suprajektiboa bada.

$f : A \rightarrow B$ bijektiboa bada, $f^{-1} : B \rightarrow A$ alderantzizko funtzioa dugu :

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

f^{-1} ere bijektiboa da eta $(f^{-1})^{-1} = f$.

Adibidea 5 a) Irudikatu $A = \{a, b, c, d\}$ multzotik $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ multzorako funtzio bijektiboa eta bere alderantzizkoa.

b) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$ bijektiboa da aurretik ikusi dugunez. Aurkitu alderantzizkoa.

2 Funtzio konposaketa

Lehenik funtzio berdintza definituko dugu : $f, g : A \rightarrow B$ emanik, f eta g berdinak direla esango dugu, $f = g$ idatziz, baldin $f(a) = g(a)$ edozein $a \in A$ -rako.

Definizioa 4 $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$ emanik, funtzio konposatua deituko diogu $g \circ f : A \rightarrow C$ funtzioari non edozein $a \in A$ -rentzat

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Adibidea 6 a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ eta $C = \{w, x, y\}$ multzoak emanik, irudikatu bi funtzio $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$, eta hauen funtzio konposatua $g \circ f : A \rightarrow C$.

b) Izan bitez $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funtzioak, $f(x) = x^2$ eta $g(x) = x + 5$. Kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$, berdinak dira?

Adibidean ikusi dugunez, normalean $f \circ g \neq g \circ f$. Gainera, gerta daiteke $f \circ g$ eta $g \circ f$ funtzioetako bat existitzea baina ez bestea, edo biak ez existitzea.

A multzorako *identitate funtzioa* deituko diogu $\mathbf{1}_A : A \rightarrow A$ funtzioari non $\mathbf{1}_A(a) = a$ edozein $a \in A$ -rako. Propietate hau dugu $f : A \rightarrow B$ funtzio bat emanik :

$$f \circ \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ f = f$$

eta f bijektiboa bada

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A \quad \text{eta} \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$$

Funtzio konposaketarako emaitza hauek ditugu.

Teorema 1 $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$ emanik :

- i) baldin f eta g injektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere injektiboa da,
- ii) baldin f eta g suprajektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere suprajektiboa da.

Froga. i) Hipotesia : f eta g injektiboak dira. $g \circ f : A \rightarrow C$ injektiboa dela frogatu behar dugu. Izan bitez $a_1, a_2 \in A$, baldin $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, g injektiboa denez $f(a_1) = f(a_2)$, eta f injektiboa denez $a_1 = a_2$. Beraz $g \circ f$ injektiboa da.

ii) Hipotesia : f eta g suprajektiboak dira. $g \circ f : A \rightarrow C$ suprajektiboa dela frogatu behar dugu. Izan bedi $c \in C$, g suprajektiboa denez existituko da $b \in B$ bere irudia $g(b) = c$ izanik, eta f suprajektiboa denez existituko da $a \in A$ bere irudia $f(a) = b$ izanik, beraz $c = g(b) = g(f(a))$, hau da, $c = (g \circ f)(a)$. Ondorioz $g \circ f$ suprajektiboa da. \diamond

Teorema 2 Baldin $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$ bijektiboak badira, orduan $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiboa da eta

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Froga. Hipotesia : f eta g bijektiboak dira. Aurreko teoremaren arabera $g \circ f$ bijektiboa da. Froga dezagun orain $(g \circ f)^{-1}$ eta $f^{-1} \circ g^{-1}$ funtzioak, biak C -tik A -rakoak, berdinak direla. Izan bedi $z \in C$, baldin $(g \circ f)^{-1}(z) = x$, orduan $z = (g \circ f)(x)$, $z = g(f(x))$, $g^{-1}(z) = f(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$, hau da, $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$, bi funtzioekin $z \in C$ -ren irudia bera da. Beraz $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. \diamond

Teorema 3 $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ eta $h : C \rightarrow D$ emanik, orduan

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Froga. Edozein $x \in A$ -rako irudi bera dugu :

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \\ (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Beraz $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. \diamond

Funtzio konposaketa elkarkorra denez, $h \circ g \circ f$ idatz dezakegu. Bestalde, $f : A \rightarrow A$ emanik :

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f = f \circ f^{n-1}$$

Adibidea 7 Kontsidera dezagun $f(x) = 2x - 3$ funtzioa. Kalkulatu f^4 funtzioa.

Izan bitez orain $f : A \rightarrow B$ eta $B' \subseteq B$. B' azpimultzoaren f funtzioarekiko *aurreirudia* definituko dugu honela :

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

Baldin $B' = \{b\}$, $f^{-1}(b)$ idatziko dugu. Bestalde, kontuan izan aurreirudiaren definizioan f^{-1} ez dela alderantzizko funtzioa, ez baitugu eskatzen f bijektiboa izan behar duenik. Aurreirudian elementu bat baino gehiago izan dezakegu, edo hutsa ere izan daiteke. Funtzioa bijektiboa da baldin eta soilik baldin B -ko edozein elementuren aurreirudia elementu bakarrekoa bada.

Adibidea 8 Irudikatu $A = \{a, b, c, d\}$ multzotik $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ multzorako funtzio bat eta kalkulatu $f^{-1}(B')$, non $B' = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, eta baita ere $f^{-1}(\alpha)$.

Azkenik, frogapen nabarmena duen teorema hau dugu.

Teorema 4 A eta B multzo finituak badira, eta $|A| = |B|$, orduan $f : A \rightarrow B$ injektiboa da baldin eta soilik baldin suprajektiboa bada.

3 Biderkadura kartesiarra eta erlazioak

Multzo bateko elementuen arteko erlazioa formalki definitu ahal izateko, biderkadura kartesiarraren kontzeptuarekin hasiko gara. A eta B multzoen biderkadura kartesiarra hau da :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ eta } b \in B\}$$

Bikote ordenatua deituko diogu (a, b) -ri, a izanik lehenengo osagaia eta b bigarrenko osagaia. (a, b) eta (c, d) bikoteak berdinak dira baldin eta soilik baldin $a = c$ eta $b = d$; beraz $(a, b) \neq (b, a)$ baldin $a \neq b$.

A eta B finituak badira $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ dugu.

Adibidea 9 *Kalkulatu $A = \{2, 3, 4\}$ eta $B = \{4, 5\}$ multzoen biderkadura kartesiarra. Baita ere kalkulatu $B \times B$.*

Definizioa 5 *A multzoaren gaineko erlazioa deituko diogu $A \times A$ -ko edozein \mathfrak{R} azpimultzori.*

Adibidea 10 *a) Definitu $A = \{2, 3, 4, 5\}$ multzoaren gaineko erlazio bat.
b) Kontsidera dezagun $A = \mathbf{Z}^+$ multzoaren gaineko $\mathfrak{R} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ erlazioa. $(7, 7), (7, 11), (8, 2) \in \mathfrak{R}$? Idatzi erlazioa predikatu idazkera erabiliz.*

4 Erlazioen propietateak

Erlazio batek izan ditzakeen propietate interesgarri batzuk definituko ditugu orain. A multzoaren gaineko \mathfrak{R} erlazioa :

– *bihurkorra* da baldin

$$\forall x \in A, \quad x \mathfrak{R} x$$

– *simetrikoa* da baldin

$$\forall x, y \in A, \quad x \mathfrak{R} y \Rightarrow y \mathfrak{R} x$$

– *trantsitiboa* da baldin

$$\forall x, y, z \in A, \quad x \mathfrak{R} y \text{ eta } y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$$

– *antisimetrikoa* da baldin

$$\forall x, y \in A, \quad x \mathfrak{R} y \text{ eta } y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$$

Adibidea 11 Aztertu zein propietate betetzen dituzten $A = \{1, 2, 3\}$ multzoaren gaineko erlazio hauek :

$$\mathfrak{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (1, 3)\}$$

Adibidea 12 Aztertu \mathbf{Z}^+ multzoaren gaineko erlazio honek, zatigarritasun erlazioak, betetzen dituen definitu ditugun propietateak : $a\mathfrak{R}b$ baldin $a|b$.

Erlazio mota ezberdinen artean ordena erlazioak eta hurrengo atalean aztertuko ditugun baliokidetasun erlazioak nabarmenduko ditugu.

Definizioa 6 Ordena erlazioa deituko diogu A multzoaren gaineko \mathfrak{R} erlazioari baldin bihurkorra, antisimetrikoa eta trantsitiboa bada.

Bestalde, A multzoaren gaineko \mathfrak{R} ordena erlazioa emanik, ordena totala dela esango dugu baldin edozein $a, b \in A$ hartuz $a\mathfrak{R}b$ edo $b\mathfrak{R}a$ betetzen bada; horrela ez bada ordena partziala dela esango dugu.

Adibidea 13 Frogatu ordena erlazioak direla eta aztertu ordena totalak edo partzialak diren.

i) \mathbf{Z}^+ multzoan : $a\mathfrak{R}b$ baldin $a|b$

ii) \mathbf{Z} multzoan : $a\mathfrak{R}b$ baldin $a \leq b$

iii) \mathcal{U} unibertsoa emanik, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ multzoan : $A\mathfrak{R}B$ baldin $A \subseteq B$

5 Baliokidetasun erlazioak

Has gaitezen baliokidetasun erlazioa definituz.

Definizioa 7 Baliokidetasun erlazioa deituko diogu A multzoaren gaineko \mathfrak{R} erlazioari baldin bihurkorra, simetrikoa eta trantsitiboa bada.

Aurrerago ikusiko dugu baliokidetasun erlazioak multzoaren partizio bat sortzen duela. Kontzeptu hau zehaztuko dugu. Izan bitez A multzoa eta $A_i \subseteq A$ azpimultzo ez hutsak, $i \in I$ (indize multzoa). A -ren partizioa da $\{A_i\}_{i \in I}$ baldin $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ eta $A_i \cap A_j = \emptyset$ edozein $i, j \in I$ -rako, $i \neq j$.

Baliokidetasun klaseekin jarraituko dugu, ondoren oinarritzko propietateak frogatuz.

Definizioa 8 *Izan bedi A multzoaren gaineko \mathfrak{R} baliokidetasun erlazioa. $x \in A$ -ren baliokidetasun klasea deituko diogu azpimultzo honi :*

$$[x] = \{y \in A \mid y\mathfrak{R}x\}$$

Beraz $y \in [x]$ baldin eta soilik baldin $y\mathfrak{R}x$.

Teorema 5 *Izan bedi A -ko \mathfrak{R} baliokidetasun erlazioa. Edozein $x, y \in A$ -rako :*

- a) $x \in [x]$
- b) $x\mathfrak{R}y$ baldin eta soilik baldin $[x] = [y]$
- c) $[x]$ eta $[y]$ ezberdinak badira orduan disjuntuak dira, $[x] \cap [y] = \emptyset$

Froga. a) \mathfrak{R} bihurkorra denez, $x\mathfrak{R}x$, $x \in [x]$.

b) (\Rightarrow) Hipotesia : $x\mathfrak{R}y$. $[x] = [y]$ deduzitu behar dugu, eta lehenik $[x] \subseteq [y]$. Izan bedi $v \in [x]$, $v\mathfrak{R}x$, \mathfrak{R} trantsitiboa izanik, $v\mathfrak{R}y$, $v \in [y]$. Beraz $[x] \subseteq [y]$. Orain $[y] \subseteq [x]$ deduzituko dugu. Izan bedi $w \in [y]$, $w\mathfrak{R}y$, \mathfrak{R} simetrikoa denez, $y\mathfrak{R}x$, eta \mathfrak{R} trantsitiboa denez, $w\mathfrak{R}x$, $w \in [x]$. Beraz $[y] \subseteq [x]$. Ondorioz $[x] = [y]$.

(\Leftarrow) Hipotesia : $[x] = [y]$. Dakigunez (a)-tik $x \in [x]$, hipotesitik $x \in [y]$, beraz $x\mathfrak{R}y$.

c) Hipotesia : $[x] \neq [y]$. r.a.a. : baldin $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existituko da $z \in [x] \cap [y]$, $z \in [x]$ eta $z \in [y]$, $z\mathfrak{R}x$ eta $z\mathfrak{R}y$, \mathfrak{R} simetrikoa izanik, $x\mathfrak{R}z$, eta \mathfrak{R} trantsitiboa izanik, $x\mathfrak{R}y$, ondorioz (b)-tik $[x] = [y]$, kontraesana hipotesiarekin. Beraz $[x] \cap [y] = \emptyset$. \diamond

Teorema honen arabera, A multzoaren gaineko baliokidetasun erlazio baten determinatutako klase ezberdinek A -ren partizio bat osatzen dute.

Adibidea 14 a) *Izan bitez $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ multzoa eta honen gaineko erlazioa, $\mathfrak{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d), (e, f), (f, e), (d, f), (f, d)\}$. Egiaztatu baliokidetasun erlazioa dela. Determinatu klaseak eta idatzi A -ren partizioa.*

b) *Izan bedi \mathbf{Z} multzoaren gaineko erlazioa : $a\mathfrak{R}b$ baldin $a^2 = b^2$. Egiaztatu baliokidetasun erlazioa dela. Kalkulatu klaseak eta idatzi erlazioak determinatutako partizioa.*

6 Modulu finituko osokoak

Dakigunez osokoen multzoa infinitua da. Orain definituko dugu, balio-kidetasun erlazio baten bidez, osokoen multzo finitua, n osoko dituen, n moduluko osokoen multzoa deitua. Aurrerago multzo honetan batuketa eta biderkaketa definituko ditugu, propietate bereziak dituen egitura algebraikoa sortuz.

Izan bedi $n \in \mathbf{Z}$, $n > 1$. Esango dugu a eta b osokoak kongruenteak modulu n direla, $a \equiv b \pmod{n}$ idatziz, baldin $n \mid a - b$, hau da, $a = b + kn$, $k \in \mathbf{Z}$ -ren batentzat. \mathbf{Z} -ren gaineko balio-kidetasun erlazioa da n moduluko kongruentzia :

- bihurkorra : edozein $a \in \mathbf{Z}$ -rako, $a = a + 0 \cdot n$ eta $0 \in \mathbf{Z}$, $a \mathfrak{R} a$.
- simetrikoa : izan bitez $a, b \in \mathbf{Z}$, baldin $a \mathfrak{R} b$, $a = b + kn$ non $k \in \mathbf{Z}$, $b = a + (-k)n$ eta $-k \in \mathbf{Z}$, $b \mathfrak{R} a$.
- iragankorra : izan bitez $a, b, c \in \mathbf{Z}$, baldin $a \mathfrak{R} b$ eta $b \mathfrak{R} c$, $a = b + kn$ eta $b = c + ln$ non $k, l \in \mathbf{Z}$, $a = c + ln + kn$, $a = c + (l + k)n$ eta $l + k \in \mathbf{Z}$, $a \mathfrak{R} c$.

Adibidea 15 $2 \equiv 12 \pmod{5}$? $2 \equiv 13 \pmod{5}$?

Kalkula ditzagun n moduluko kongruentziak determinatutako klaseak. Izan bedi $t \in \mathbf{Z}$, lehenik $[t]$ klasearen ordezkaria aukeratuko dugu : t zatituz n -rekin,

$$t = qn + r$$

beraz $t \equiv r \pmod{n}$, $[t] = [r]$. Honela $[t]$ klaseko ordezkarietatik r hartuko dugu, zatiketaren hondarra, $0 \leq r < n$. Bestalde, $[r]$ klaseko osokoak aurkituko ditugu : $u \in [r]$ b.s.b. $u \equiv r \pmod{n}$ b.s.b. $u = r + kn$ non $k \in \mathbf{Z}$, hau da,

$$[r] = \{r + kn \mid k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, r - 2n, r - n, r, r + n, r + 2n, \dots\}$$

Beraz n klase ditugu, r hondarrak $0, 1, 2, \dots, n - 1$ balioak har baititzake, klase ezberdinak ($r - n < 0$ eta $r + n \geq n$ izanik). Honela idatziko dugu n moduluko kongruentziari dagokion \mathbf{Z} -ren partizioa :

$$\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n - 1]\}$$

Anbiguitasunik ez badago, $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ ere idatziko dugu.

Adibidea 16 Jarrai dezagun $n = 5$ moduluko kongruentziarekin. Idatzi dagokion osokoen partizioa. Klase hauetatik zein da $[-13]$? Idatzi klase honetako osokoak.

5. gaia : Grafoak

1 Definizioak

Grafoa arlo askotan agertzen zaigun egitura matematiko sinplea da : erpin multzo bat eta hauen artean ertz edo geziak. Esate baterako, komunikazio sare batean transmisio guneak eta komunikazio lineak kontsideratuz grafoa defini dezakegu. Grafo teoriako hainbat kontzeptuk esanahi zuzena dute adibide honetan. Edozein gune hartuz, beste edozein gunera bidal dezakegu mezua? Nolakoa da propietate hau betetzeko behar dugun gutxieneko egitura? Mezua gune batetik bestera bidaltzeko bide bakarra daukagu? Defini dezakegu guneekin eraztun bat komunikazio sarean? Problema hauek eta beste asko aztertuko ditugu egitura matematiko honen inguruan, aplikazioak eremu askotan dituen teoria garatuz eta interpretazio ezberdinak dituzten problemak estudiantuz. Definizio formalekin hasiko gara.

Grafo *zuzendua* deituko diogu $G = (V, E)$ bikoteari non V , multzo finitu ez hutsa, *erpin* multzoa den eta $E \subseteq V \times V$ ertz multzoa.

Adibidea 1 *Marrastu grafo zuzendu bat, eta idatzi erpin multzoa eta ertz multzoa.*

Grafo zuzenduko ertzak erpin bikote ordenatuak dira, $(a, b) \neq (b, a)$ baldin $a \neq b$. Esango dugu (b, c) ertza *intzidentea* dela b eta c erpinekin. Baita ere esaten da b erpina c -ra *adjazentea* edo *albokoa* dela eta c erpina b -tik *adjazentea*. Bestalde (b, c) ertzaren *jatorria* b da eta *amaiera* c . Azkenik (a, a) ertzari *begizta* deituko diogu, eta erpin bat *bakartua* dela esango dugu ertz intzidenterik ez badu.

Ertzen noranzkoa kontuan ez bada hartzen grafo ez zuzendua dugu, ertzak izanik erpin bikote ez ordenatuak, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Adibidea 2 *Marrastu grafo ez zuzendu bat, eta idatzi erpin multzoa eta ertz multzoa.*

Zehazten ez bada, grafoa ez zuzendutzat hartuko dugu.

Izan bitez G grafo ez zuzenduko x eta y erpinak. G -ko x - y ibilaldia deituko diogu honelako ertz sekuentziari :

$$\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-2}, x_{n-1}\}, \{x_{n-1}, x_n\}$$

Ibilaldiaren hasiera $x = x_0$ erpina da eta amaiera $y = x_n$ erpina, ibilaldia $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ ertzetatik, $i = 1, \dots, n$, igarotzen delarik. Ibilaldiaren luzera ertz kopurua da, $n \geq 1$. Baldin $x \neq y$ ibilaldi irekia deitzen zaio eta $x = y$ bada itxia. Ibilaldi batean erpinak eta ertzak errepika daitezke.

Adibidea 3 *Definitu grafo batean ibilaldi batzuk.*

Ibilaldi mota berezi batzuk definituko ditugu. Kontsidera dezagun G grafo ez zuzenduko x - y ibilaldia :

- Baldin ertzik ez bada errepikatzen *katea* deituko diogu; x - x kate itxiari *zirkuitua* edo *ingurubira* deitzen zaio.
- Baldin edozein erpinetik gehienez behin igarotzen bada, *bidea* deituko diogu; x - x bide itxiari *zikloa* deitzen zaio. Bide eta zikloetan ez da begiztarik onartzen.

Adibidea 4 *Aurreko grafoan definitu katea, bidea, zirkuitua, zikloa.*

Grafo zuzenduan *ibilaldi zuzenduak* izango ditugu : kate zuzenduak, bide zuzenduak, etab.

Adibidea 5 *Grafo baten bidez azaldu ibilaldi zuzendu bat izan dezakegula baina ez aurkako noranzkoa duen ibilaldia.*

Emaitza elemental honekin jarraituko dugu.

Teorema 1 *Izan bedi G grafo ez zuzendua, eta a eta b bere erpinak. Baldin a -tik b -rako ibilaldirik badago, existituko da a -tik b -rako bidea.*

Froga. Har dezagun a -tik b -rako ibilaldia. Bidea ez bada, erpinen bat errepikatuko da :

$$\{a, x_1\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}, \dots, \{x_{m-1}, x_m\}, \dots, \{x_{n-1}, b\}$$

$x_k = x_{m-1}$ izanik eta $m - 1 > k$. Honela bada ibilaldi berria definituko dugu :

$$\{a, x_1\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_{m-1}, x_m\}, \dots, \{x_{n-1}, b\}$$

aurrekoa baino motzagoa dena. Prozesua errepikatuko dugu bidea lortu arte.
 \diamond

Aurrera jarraituz, G grafo ez zuzendua *konektatua* dela esango dugu baldin edozein bi erpin ezberdinen artean bidea badago beti (edo ibilaldia badago, baliokidea denez).

G grafo zuzendua bada, grafo ez zuzendu elkartua lortuko dugu ertzen noranzkoa kontuan ez hartuz, eta esango dugu G konektatua dela bere grafo ez zuzendu elkartua konektatua bada.

Adibidea 6 *Marraztu grafo zuzendu bat eta aztertu konektatua den.*

Adibidea 7 *Marraztu G grafo ez zuzendu bat konektatua ez dena. Azaldu G -k bi zati (edo gehiago) dituela, G_1 eta G_2 grafoak, konektatuak, eta ez dagoelarik G -ko ertzik jatorria G_1 -en eta amaiera G_2 -n duenik. Zati hauei grafoaren osagaiak deitzen zaie.*

Grafo baten *osagaiak* formalki honela definituko ditugu. $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua emanik, erraz frogatuko dugu V -ren gaineko erlazio hau baliokidetasun erlazioa dela : $a \mathfrak{R} b$ baldin a erpinetik b erpinerako ibilaldia badago (edo $a = b$ bada). V -ren partizioaren baliokidetasun klaseak, bakoitzari dagozkion ertzekin, G grafoaren osagaiak dira. Nabaria da osagai hauek konektatuak direla eta osagai ezberdineko erpinen artean ez dagoela G -ko ertzik.

G grafoaren osagaien kopurua $k(G)$ idatziz adieraziko dugu. Grafoa konektatua da baldin $k(G) = 1$.

Aurrera jarraituz, G grafoari *multigrafoa* deituko diogu baldin ertzen bat behin baino gehiagotan badago.

Adibidea 8 *Marraztu multigrafo zuzendua, ertzen anizkoitzasunak izanik 1, 2, 3.*

Espresuki multigrafoa dela esaten denean izan ezik, grafoa ez da multigrafoa izango, hau da, grafoaren ertzak bakunak izango dira.

Azkenik, aipatuko dugu grafoak matrizeen bidez adieraz ditzakegula. $G = (V, E)$ grafo zuzenduarentzat, erpinak ordenatu ondoren, honela definituko dugu $A = [a_{ij}]$ *adjazentzia matrizea* :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } (x_i, x_j) \in E \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Ez da zaila frogatzea A^r matrizea kalkulatzeko badugu, honen (i, j) sarrerak r luzerako x_i-x_j ibilaldi ezberdinen kopurua adierazten duela (irekiak eta itxiak). Bi erpinen artean r luzerako ibilaldia dagoen jakin nahi badugu, eta ibilaldi kopurua ez bazaigu interesatzen, algebra boolearra erabil dezakegu A^r kalkulatzeko ($1 + 1 = 1$).

Grafo ez zuzenduarentzat adjazentzia matrize simetrikoa hartuko dugu, ertz bakoitzerako dagozkion bi ertz zuzenduak bagenu bezala. Bestalde, gogoratu behar dugu grafo ez zuzenduan ibilaldi bat eta bere alderantzizkoa berdina direla. Grafoa konektatua den jakiteko $A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ kalkulatu dezakegu, n izanik grafoaren erpin kopurua, kontuan hartuta bi erpin ezberdinen arteko bide batek gehienez $n - 1$ luzera duela.

Adibidea 9 *Marratzu grafo zuzendu bat eta honen grafo ez zuzendu elkartua eta idatzi bien adjazentzia matrizeak. Konektatuak dira ?*

2 Azpigrafoak, osagarriak eta grafo isomorfismoa

Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa, zuzendua edo ez zuzendua. Esango dugu $G_1 = (V_1, E_1)$ grafoa G -ren *azpigrafoa* dela baldin $V_1 \subseteq V$ eta $E_1 \subseteq E$. Azpigrafo *sortzailea* deituko diogu $V_1 = V$ kasuan.

Adibidea 10 *Marratzu G grafo ez zuzendua, G' grafo zuzendua, eta hauen azpigrafo batzuk. Azpigrafoak sortzaileak dira ?*

Bestalde, $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua emanik, $V_1 \subseteq V$ erpin azpimultzoak *induzitutako azpigrafoa* deituko diogu $G_1 = (V_1, E_1)$ azpigrafoari non V_1 -eko erpinen artean ditugun G -ko ertz denak dauden : baldin $\{x, y\} \in E$ eta $x, y \in V_1$ orduan $\{x, y\} \in E_1$. Azpigrafo induzitua izendatzeko $G_1 = \langle V_1 \rangle$

idatziko dugu. Definizio bera dugu G grafo zuzendurako, ertzak (x, y) bezala idatziz.

Adibidea 11 *Aurreko adibidean aztertu azpigrafoak dagozkien erpin multzoek induzitutakoak diren.*

Grafo baten osagaiak, lehenago definitu dugun erpin multzoaren gaineko baliokidetasun erlazioak determinatutako partizioko erpin azpimultzoek induzitutako azpigrafoak dira.

G grafo zuzendu edo ez zuzenduan x erpina kentzen badugu azpigrafo hau dugu :

$$G - x = \langle V - \{x\} \rangle$$

Eta e ertza kentzen badugu :

$$G - e = (V, E - \{e\})$$

Adibidea 12 *Grafo bat marraztu eta kendu erpin bat eta ertz bat.*

Grafo *osatua* deituko diogu erpinen arteko ertz guztiak dituen begizta gabeko grafo ez zuzenduari, K_n idatziz n erpineko multzoaren gaineko grafo osatua izendatzeko.

Adibidea 13 *Marraztu K_1, K_2, K_3, K_4 . Zenbat ertz ditu K_n -k?*

Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua. G -ren *osagarria* deitzen zaio, \overline{G} idatziz, begizta gabeko grafoari non G -ko erpinak dauden eta G -en ez dauden ertz guztiak, eta hauek bakarrik.

Adibidea 14 *Marraztu grafo bat eta bere osagarria.*

$G_1 = (V_1, E_1)$ eta $G_2 = (V_2, E_2)$ grafo ez zuzenduak emanik, $f : V_1 \rightarrow V_2$ funtzioa grafo *isomorfismoa* da baldin bijektiboa bada eta erpinen arteko adjazentziak mantentzen baditu, hau da,

$$\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$$

Honelako funtzioa existitzen bada esango dugu G_1 eta G_2 grafoak isomorfoak direla. Grafo zuzenduentzat ere definizio berdina dugu, ertz zuzenduak idatziz.

Adibidea 15 *Aztertu grafo isomorfismo batzuk.*

Izan bedi G grafo edo multigrafo ez zuzendua. G -ko x erpinaren *gradua* deituko diogu x -ekin intzidenteak diren ertzen kopuruari, $d(x)$ idatziz. Erpinean begizta bat badago bi ertz intzidentetzat hartuko dugu. Bat graduko erpina zintzilikatua da eta zero gradukoa bakartua.

Adibidea 16 *Marrastu grafo bat eta kalkulatu erpinen graduak.*

Teorema 2 $G = (V, E)$ izanik grafo edo multigrafo ez zuzendua,

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$$

Froga. Grafoko $\{a, b\}$ ertzak unitate batean gehitzen ditu $d(a)$ eta $d(b)$. ($a = b$ kasuan bitan $d(a)$.) Beraz erpinen graduen batura bitan gehitzen du ertz bakoitzak. \diamond

Korolaria 1 *Grafo edo multigrafo ez zuzenduan gradu bakoitiko erpinen kopurua bikoitia izan behar da.*

Froga. r.a.a. Honela ez balitz, $\sum_{x \in V} d(x)$ bakoitia litzateke, baina $2|E|$ bikoitia da. \diamond

Grafo ez zuzendu bateko erpin guztiek gradu bera badute grafo erregularra deitzen zaio, k -erregularra baldin erpin guztiek k gradua badute.

Adibidea 17 *a) 10 ertzeko grafo 4-erregularrik badago?*

b) Eta 15 ertzeko grafo 4-erregularrik?

Grafo zuzenduetan honela definitzen dira erpinen graduak. Izan bedi x , G grafo edo multigrafo zuzenduko erpina :

- *sarrera gradua* deituko diogu amaiera x erpinean duten ertzen kopuruari, $id(x)$ idatziz,
- *irteera gradua* deituko diogu jatorria x erpinean duten ertzen kopuruari, $od(x)$ idatziz.

3 Kate eta zirkuitu eulertarrak

Königsberg-eko zazpi zubien problema azalduz hasiko gara. Hiri hau zeharkatzen duen ibaian zazpi zubi zeuden ibaiko bi uharte eta ibai bazterren artean. Hiritarrak galdera honi erantzuten saiatzen omen ziren igandeko pasean : puntu batetik abiatuz, zubi denetatik igaro, bakoitzetik behin, eta hasierako puntura itzul ahal zitekeen. Euler-ek multigrafo baten bidez aztertu zuen problema hau, ondoren frogatuko dugun emaitza deduzituz.

Definizioa 1 *Izan bedi G grafo edo multigrafo ez zuzendua, erpin bakartu gabea. Zirkuitu eulertarra deituko diogu ertz guztietatik igarotzen den zirkuituari. Bestalde, kate eulertarra da ertz guztietatik igarotzen den kate irekia. (Gogoratu katea ertzik errepikatzen ez den ibilaldia dela eta zirkuitua kate itxia.)*

Teorema 3 *Izan bedi G grafo edo multigrafo ez zuzendua, erpin bakartu gabea. G -k zirkuitu eulertarra du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta erpin guztiek gradu bikoitia badute.*

Froga. \Rightarrow) Hipotesia : G -k zirkuitu eulertarra du.

Edozein erpin a eta b emanik, bakartuak ez direnez, zirkuitu eulertarrean daude, beraz badago a -tik b -rako katea, ondorioz bidea ere bai (gogoratu Teorema 1). Hemendik dugu G konektatua dela.

Bestalde, a erpina emanik, zirkuitu eulertarra a -tik igarotzen den bakoitzean bi ertz intzidentetik doa edo begizta batetik, eta hauek erpinaren gradua bitan gehitzen dute. Zirkuituan ertz denak daude eta bakoitza behin, beraz erpin guztiek gradu bikoitia dute.

\Leftarrow) Hipotesia : G konektatua da eta erpin guztiek gradu bikoitia dute.

Kate bat osatuko dugu erpin batetik, a -tik, abiatuz. Beste erpin batera iristean, gradua bikoitia izanik, erabili gabeko ertza daukagu arrera jarraitzeko katea luzatuz, eta azkenean a erpinera iritsiko gara zirkuitu bat osatuz.

Zirkuitu honek ez baditu ertz denak, zirkuituko ertzak kenduz geratzen den K azpigrafoa kontsideratuko dugu (erpin bakartuak ere kenduz). K -ren osagaiekin ondorengoa egingo dugu. C_i osagaiak konektatuak dira eta hauetako erpinen gradua bikoitia da nabaria denez. Gainera G konektatua izanik existitzen da x_i erpina hasierako zirkuituan dagoena eta C_i -koa dena, osagai bakoitzerako. Lehengo prozedura jarraituz osagai bakoitzean x_i -tik doan zirkuitu berria eraikiko dugu eta hasierako zirkuituari erantsiko diogu. Honela jarraituko dugu G -ko ertz denekin zirkuitua osatu arte. \diamond

Ohartu frogaren bigarren zatiak zirkuitu eulertarra eraikitzeko prozedura ematen digula.

Teorema 4 *Izan bedi G grafo edo multigrafo ez zuzendua, erpin bakartu gabea. G -k kate eulertarra du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta zehazki gradu bakoitiko bi erpin baditu.*

Froga. Aurrekoaren antzera, kate eulertarraren hasiera eta amaiera gradu bakoitiko erpinak izanik. \diamond

Adibidea 18 *Marraztu bi grafo eta aurkitu kate edo zirkuitu eulertarra, baldin badago.*

Grafo zuzenduetan kate eta zirkuitu zuzenduak defini ditzakegu. Emaitza hau dugu.

Teorema 5 *Izan bedi G grafo edo multigrafo zuzendua, erpin bakartu gabea. G -k zirkuitu eulertar zuzendua du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta edozein erpinerako berdinak badira sarrera gradua eta irteera gradua.*

Adibidea 19 *Definitu grafo zuzenduak eta aztertu zirkuitu eulertar zuzendua duten. (Kontuan izan grafo zuzendua konektatua den jakiteko grafo ez zuzendu elkartua hartu behar dugula.)*

4 Bide eta ziklo hamiltondarrak

Hamilton-ek asmatu zuen jolasean dodekaedroaren erpinak munduko hiri nagusiak ziren eta hauetatik igarotzen zen ibilbidea aurkitu behar zen, hiri bakoitza behin zeharkatu eta hasierako hirian amaituz.

Definizioa 2 *Izan bedi G grafo edo multigrafoa. Ziklo hamiltondarra deitzen zaio erpin guztiak dauzkan zikloari. Bide hamiltondarra erpin guztiak dauzkan bide irekia da. (Gogoratu bidea erpinik errepikatzen ez den ibilaldia dela eta zikloa bide itxia.)*

Grafo hamiltondarra deitzen zaio ziklo hamiltondarra duen grafoari. Grafoak ziklo hamiltondarra badu, orduan badu bide hamiltondarra (nahikoa baitugu zikloari ertz bat kentzea). Baina gerta daiteke grafoak bide hamiltondarra izatea eta ez ziklo hamiltondarra, edo ez bat eta ez bestea.

Lehenik grafo berezi batzuk aztertuko ditugu. G grafo ez zuzendua *zaticibikoa* da baldin erpin multzorako $\{V_1, V_2\}$ partizioa defini badaiteke, ertz bakoitzak jatorria V_1 -en eta amaiera V_2 -n duelarik. *Zaticibiko grafo osatua* dugu V_1 -eko erpin bakoitza V_2 -ko erpin guztiekin adjazentea bada; $K_{m,n}$ idatziko dugu $m = |V_1|$ eta $n = |V_2|$ izanik.

Adibidea 20 *Marraztu zaticibiko grafo bat osatua ez dena. Marraztu $K_{2,3}$ eta $K_{3,3}$ zaticibiko grafo osatuak.*

Adibidea 21 *Aztertu $K_{m,n}$ zaticibiko grafo osatuak noiz duen ziklo hamiltondarra eta noiz bide hamiltondarra.*

Adibidea 22 *Bestalde, nabaria da K_n grafo osatua, $n \geq 3$, hamiltondarra dela, nahikoa dugu erpinen ordenazio bat aukeratzea. Zenbat ziklo hamiltondar ditu zehazki?*

Grafo hamiltondarrentzat ditugun emaitza orokorrak aztertzen hasiko gara. Lehenik esan behar da grafo hamiltondarra karakterizatzeko ez dagoela beharrezkoa eta nahikoa den baldintzarik. Ikusiko ditugu baldintza batzuk beharrezkoak direnak baina ez nahikoak, eta beste baldintza batzuk nahikoak baina ez beharrezkoak.

Baldintza beharrezkoak

G grafoa hamiltondarra bada, agerikoa da hau betetzen dela :

- a) G konektatua da eta erpin guztiek gutxienez 2 gradua dute.
- b) Baldin a erpinaren gradua zehazki 2 bada, orduan a erpinarekin intzidenteak diren bi ertzak ziklo hamiltondarrean daude.
- c) G grafoa zatibikoa den kasu berezian, $\{V_1, V_2\}$ izanik dagokion erpin partizioa, orduan $|V_1| = |V_2|$ bete behar da G hamiltondarra bada.

Grafoa hamiltondarra den aztertzean urrats hauek jarraituko ditugu :

- (a) baldintza betetzen den ala ez erraz egiaztatuko dugu. Ez bada betetzen grafoa ez da hamiltondarra.
- (b) baldintza ziklo hamiltondarra eraikitzeke erabiliko dugu, edo bestela ez dela existitzen frogatzeko kasu batzutan.
- (c) baldintza kasu berezi batzutan erabiliko dugu ziklo hamiltondarra ez dela existitzen frogatzeko : grafoa zatibikoa dela frogatzen badugu lehenik, $|V_1| \neq |V_2|$ desberdintzatik hamiltondarra ez dela ondorioztatuko dugu.

Adibidea 23 *Mahaiaren inguruan bederatzi pertsona ipini behar dira, pertsona bakoitzaren ezker eskuinean honen lagunak eseri behar direlarik. Problema hau aztertzeke definitu grafoa. Zer aurkitu behar dugu? Aztertu emandako grafoentzat soluzioa baden.*

Adibidea 24 *Aztertu grafo hamiltondarra den.*

Baldintza nahikoak

Bide eta ziklo hamiltondarrentzat emaitza nagusi hauek ditugu, frogatu gabe emango ditugunak. Korolarioak berehalakoak dira.

Teorema 6 *Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin $d(x) + d(y) \geq n$ edozein erpin x eta y -rako, $x \neq y$, orduan G -k badu ziklo hamiltondarra.*

Korolarioa 2 *Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin $d(v) \geq n/2$ edozein erpinerako orduan G -k badu ziklo hamiltondarra.*

Teorema 7 *Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 2$ erpinekoa. Baldin $d(x) + d(y) \geq n - 1$ edozein erpin x eta y -rako, $x \neq y$, orduan G -k bide hamiltondarra du.*

Korolarioa 3 *Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 2$ erpinekoa. Baldin $d(v) \geq (n - 1)/2$ edozein erpinerako, orduan G -k badu bide hamiltondarra.*

Adibidea 25 *Zazpi azterketa ipini behar dira zazpi egunetan, irakasle berak emandako irakasgaien azterketak ondoz ondokoak ez izanik. Definitu problemari dagokion grafoa. Zer aurkitu behar dugu? Irakasle bakoitzak gehienez lau irakasgai baditu, problemak badu soluzioa?*

6. gaia : Zuhaitzak

1 Definizioak eta propietateak

Zuhaitzak hainbat arlotan erabiltzen diren grafo bereziak dira. Zuhaitzak ditugu datu egituretan, sailkapen teknketan, kodifikazioaren teorian, optimizazio problemetan.

Definizioa 1 *G begizta gabeko grafo ez zuzenduari zuhaitza deituko diogu baldin konektatua bada eta ez badu ziklorik. G zuhaitza izendatzeko T idatziko dugu.*

Adibidea 1 *Marraztu grafo batzuk eta aztertu zuhaitzak diren.*

Grafo baten *zuhaitz sortailea* deituko diogu zuhaitza den azpigrafo sortzailerari. (Dakigunez, azpigrafo bat sortailea da grafoaren erpin denak baditu.)

Adibidea 2 *Marraztu grafo bat eta bere azpigrafo sortzaile bat.*

Zuhaitza beste era batera ere defini dezakegu.

Teorema 1 *(Zuhaitzaren definizio baliokidea) G begizta gabeko grafo ez zuzendua zuhaitza da baldin eta soilik baldin konektatua bada eta edozein ertz kenduz deskonektatu egiten bada.*

Froga. \Rightarrow) Hipotesia : G konektatua da eta ez du ziklorik. Edozein ertz kenduz deskonektatu egiten dela frogatu behar dugu.

r.a.a. Grafoari $e = \{x, y\}$ ertza kenduz $G - e$ konektatua balitz, existituko litzateke $x-y$ bidea $G - e$ grafoan, eta bide honi e ertza erantsiz zikloa genuke G grafoan, kontraesana.

\Leftarrow) Hipotesia : G konektatua da eta edozein ertz kenduz deskonektatu egiten da. Ziklorik ez duela frogatu behar dugu.

r.a.a. G grafoak zikloa balu, ziklo honetako edozein ertz $e = \{x, y\}$ kenduz, $G - e$ konektatua izaten jarraituko luke, kontraesana. (G konektatua izanik, edozein bi erpin a eta b -ren artean beti dago bidea, eta bide honetan e ertza balego, ertz honen ordeztatu zikloan geratzen den zatia erantsiz $a-b$ ibilaldia genuke, eta hemendik bidea, $G - e$ grafoan, ondorioz hau konektatua litzateke.) \diamond

Definizio baliokide honen arabera, esan dezakegu grafo baten zuhaitz sortzailea, azpigrafo sortzaile konektatu minimala dela (azpigrafo ertzen azpimultzo bat hartuz, ez denak, azpigrafoa deskonektatuko litzateke).

Baita ere definizio baliokidetik, zuhaitzaren ertz bat kentzen badugu bi osagai geratzen dira, eta ziklorik ez dugunez, osagai hauek zuhaitzak dira.

Beste propietate batzuk ere baditugu zuhaitzentzat.

Teorema 2 T zuhaitzaren edozein bi erpin a eta b emanik, bide bat dago, bakarra, erpin hauen artean.

Froga. Hipotesia : T konektatua da eta ez du ziklorik.

Lehenik, T konektatua bada, badago $a-b$ bidea. Bakarra dela frogatuko dugu (r.a.a.). Bide bat baino gehiago badaude, bi bide hartuz ibilaldi itxia dugu eta honen ertz batzuk zikloa osatuko dute (bi bideak ezberdinak baitira), baina T -k ez du ziklorik. \diamond

Teorema 3 G grafo ez zuzendua konektatua da baldin eta soilik baldin zuhaitz sortzailea badu.

Froga. \Leftarrow) Zuhaitz sortzailea T existitzen bada, alde batetik T azpigrafoa sortzailea da, beraz grafoko erpin guztiak ditu, eta bestetik T zuhaitza da, beraz konektatua, ondorioz G konektatua izango da.

\Rightarrow) Izan bedi G konektatua. Lehenik, begiztak kenduz geratzen den G_1 azpigrafoa hartuko dugu. Baldin G_1 -eko edozein ertz kenduz deskonektatu egiten bada, zuhaitza da, bestela konektatuta uzten duen ertz bat kenduz G_2 dugu. Antzera, baldin G_2 -ko edozein ertz kenduz deskonektatu egiten bada, zuhaitza da, eta bestela konektatuta uzten duen ertz bat kenduz G_3

izango dugu. Honela jarraituko dugu eta azkenean, edozein kasutan, azpigrafo sortzaile konektatu minimala lortuko dugu, hau da, zuhaitz sortzailea. \diamond

Teorema 4 T zuhaitzak v erpin eta e ertz baditu orduan :

$$v = e + 1$$

Froga. Erpin kopuruaren gaineko indukzioz frogatuko dugu. Hasteko, $v = 1$ denean $e = 0$ da begiztarik ez dugunez, $1 = 0 + 1$.

Indukzio hipotesia : eman dezagun formula betetzen dela gehienez v erpin dituzten zuhaitzentzat. Izan bedi T zuhaitza $v' = v + 1$ erpinekoa. T zuhaitzetik ertz bat kenduz bi osagai ditugu eta hauek zuhaitzak dira : T_1 zuhaitza, v_1 erpin eta e_1 ertz dituen, eta T_2 zuhaitza, v_2 erpin eta e_2 ertz dituen. Hauen erpin kopuruak $v' = v + 1$ baino txikiagoak dira, $v_1, v_2 \leq v$, beraz indukzio hipotesitik :

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 1 \\ v_2 &= e_2 + 1 \end{aligned}$$

Ondorioz, $v_1 + v_2 = e_1 + e_2 + 1 + 1$, eta hemendik $v' = e + 1$, non T -ren ertz kopurua $e_1 + e_2$ gehi kendu diogun ertza den. \diamond

Teorema 5 Edozein zuhaitzek ($v \geq 2$) gutxienez bi erpin zintzilikatu ditu (bat graduakoa).

Froga. Dakigunez grafo batean

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2e$$

eta zuhaitza bada $v = e + 1$ ere beteko da.

r.a.a. Eman dezagun zuhaitzak gehienez erpin zintzilikatu bat duela. Orduan graduen batura gutxienez hau da :

$$\sum_{x \in V} d(x) \geq 2(v - 1) + 1$$

beraz, hasierako bi formulak erabiliz, $2e \geq 2e + 1$, ezinezkoa. \diamond

Gai honen hasieran zuhaitzaren definizioaren ondoren beste definizio baliokidea eman genuen. Orain zuhaitzaren beste hiru definizio emango ditugu.

Teorema 6 *Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua. Zuhaitzaren definizio baliokide hauek ditugu :*

- a) G -ko bi erpin edozein emanik hauen artean bidea dago, bakarra.
- b) G konektatua da eta $v = e + 1$
- c) G -k ez du ziklorik eta $v = e + 1$

Froga. G zuhaitza bada (a), (b) eta (c) propietateak beteko ditu dakigunez. Hemen frogatuko dugu propietate hauetako bat betetzea nahikoa dela G zuhaitza izateko : konektatua eta ziklorik gabea.

a) Hipotesia : G -ko bi erpin erpin edozein emanik hauen artean bidea dago, bakarra. Ondorioz G konektatua da. Ziklorik ez duela deduzituko dugu. r.a.a. Zikloa balu, zikloaren bi erpin x eta y hartuz, bi bide ezberdin genituzke x -etik y -ra, kontraesana hipotesiarekin.

b) Hipotesia : G konektatua da eta $v = e + 1$. r.a.a. Eman dezagun zikloa duela, c erpin eta ertzekoa. Zikloan ez dauden erpinak zikloko erpinekin konektatzeko (zuzenean edo zeharka) ertz bat behar dugu erpin bakoitzerako, beraz

$$e \geq c + (v - c) = v$$

kontraesana hipotesiarekin.

c) Hipotesia : G -k ez du ziklorik eta $v = e + 1$. r.a.a. Eman dezagun G ez dela konektatua. Bere osagaiak konektatuak dira eta ez dute ziklorik, beraz zuhaitzak dira. Zuhaitz hauetan :

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 1 \\ v_2 &= e_2 + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Berdintza hauek batuz,

$$v_1 + v_2 + \dots = e_1 + e_2 + \dots + 1 + 1 + \dots$$

beraz $v \geq e + 2$, kontraesana. \diamond

Adibidea 3 *Komunikazio sare bat diseinatu behar dugu. Gune batetik beste guneetara mezu bat bidali ahal izango da mekanismo honen arabera : gune batera mezua iristen denean honek ondoko guneei bidaltzen die mezua, gune honi mezua bidali dionari izan ezik. Gune bakoitzera mezua behin iristea nahi bada, nolakoa da sareari dagokion grafoa? Zenbat komunikazio linea behar ditugu ?*

2 Errodun zuhaitzak

Zuhaitz ez zuzendu bateko ertzei noranzkoa emanaz lortzen den grafo zuzenduari *zuhaitz zuzendua* deitzen zaio. Zuhaitz zuzenduari *errodun zuhaitza* deituko diogu baldin r erpina badugu, erroa deitua, 0 sarrera gradua duena eta beste erpin guztien sarrera gradua 1 bada.

Adibidea 4 *Marrastu erroduna ez den zuhaitz zuzendua, eta baita ere errodun zuhaitza.*

Zuhaitz errodunean terminologia hau erabiliko dugu. *Hostoak* deitzen zaie 0 irteera gradua duten erpinei eta *barne erpinak* besteei. Baldin r errotik v erpinerako bidearen luzera n bada esango dugu v erpina zuhaitzaren n . *mailan* dagoela. (Beti dago errotik edozein erpinera bide zuzendua, bakarra.) Zuhaitz errodunak (a, b) ertza badu, a erpina b -ren *ama* da, eta b erpina a -ren *alaba*. Baldin c -tik d -rako bide zuzendua badago, c erpina d -ren *arbasoa* da eta d erpina c -ren *ondorengoa*.

Esango dugu zuhaitz erroduna m -tarra dela ($m > 0$) baldin erpin bakoitzak gehienez m alaba baditu; baldin barne erpin guztiek m alaba badituzte zehazki zuhaitz m -tar *osatua* deituko diogu.

Adibidea 5 *Marrastu zuhaitz 3-tar bat ez osatua eta beste bat osatua.*

Teorema 7 *Izan bedi T zuhaitz m -tar osatua, n erpin dituen, hauetatik l hostoak eta i barne erpinak. Hau dugu :*

$$\begin{aligned}n &= mi + 1 \\l - 1 &= (m - 1)i\end{aligned}$$

Froga. Barne erpin bakoitzak m alaba dituen $mi = n - 1$. Bestalde $n = i + l$ izanik $mi = i + l - 1$, $(m - 1)i = l - 1$. \diamond

Adibidea 6 *Tenis txapelketa batean 11 partaide ditugu. Partida bakoitzean jokalaria bat kanporatzen da. Zenbat partida jokatu behar dira txapelketa erabakitzeko ?*

Adibidea 7 *Gela bateko paretan lau entxufe daude eta bestalde zazpi luzagailu ditugu lau entxufekoak. Zenbat tresna elektriko konekta ditzakegu argindar sarean ?*

Azkenik, errodun zuhaitzaren *altuera* deituko diogu hostoen maila handienari.

Adibidea 8 *Zenbat hosto ditu gehienez h altuerako zuhaitz m -tarrak ?*