Tema 1. Heurísticos en Optimización Combinatorial. Ejercicios

Abdelmalik Moujahid, Iñaki Inza y Pedro Larrañaga
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea

Diseñar heurísticos tanto constructivos como basados en la mejora iterativa de una solución (función de coste, representación de individuos, vecindades) para los siguientes problemas:

1. *El problema del agente viajero*
   Dada una colección finita de ciudades, determinar la gira de mínimo coste, visitando cada ciudad exactamente una vez y volviendo al punto de partida.
   Sea $n \geq 3$, y $C = (c_{ij})$ una matriz $M(n, n)$ de números reales positivos, encontrar la permutación cíclica π de los enteros de 1 a n que minimice $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)}$

2. *El problema de la mochila* $0 - 1$
   Dado un conjunto finito de items, cada uno de los cuales tiene asocido un peso y una ganancia, seleccionar el subconjunto de items a incluir en una mochila –capaz de soportar un peso máximo finito– cuya inclusión proporcione una ganancia máxima.
   Sean n items y una mochila capaz de soportar un peso máximo C. Denotamos por b_j el beneficio obtenido al introducir el item j en la mochila, mientras que w_j denota el peso asociado a dicho item j. Se trata de seleccionar un subconjuto de items que maximicen $Z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$, sujeto a la restricción $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C$, siendo
   $$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el item } j \text{ seleccionado} \\ 0 & \text{si el item } j \text{ no seleccionado} \end{cases}$$

3. *El problema de las n reinas*
   En un hipótetico tablero de ajedrez $n \times n$, posicionar n reinas, de tal manera que ninguna ataque al resto.

4. *Problema de agrupamiento I*
   Agrupar N números en k grupos disjuntos minimizando la suma de las diferencias entre los grupos.

5. *Problema de emplazamiento de bloques rectangulares*
   Dado un conjunto de n bloques rectangulares de distintas anchuras y alturas, se trata de encontrar un emplazamiento –asignación de los centros de los bloques rectangulares a puntos de un espacio cartesiano bidimensional– de tal forma que no haya solapamientos entre los bloques rectangulares, y se minimice la función de coste $f = A + \lambda C$, donde A es el área del rectángulo que engloba todos los bloques rectangulares, λ es una constante positiva y C un término de conectividad $C = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} d_{ij}$, siendo d_{ij} la distancia entre los centros de los bloques rectangulares y w_{ij} el coste relacionado al unir el bloque rectangular i-ésimo con el bloque rectangular j-ésimo.

6. *Particionamientos de un grafo. Problema "max-cut". Problema "min-cut".*
Dado un grafo $G = (V, E)$ sin ciclos, donde cada arista lleva asociada un peso entero positivo, se trata de encontrar una partición de V en dos conjuntos disjuntos V_0 y V_1 de tal manera que la suma de los pesos de las aristas que tienen un extremo en V_0 y el otro extremo en V_1, sea máximo (*problema max-cut*) o mínimo (*problema min-cut*).

7. *Problema del conjunto de vértices independientes.*
Dado un grafo $G = (V, E)$, se trata de encontrar el denominado conjunto maximal de vértices independientes, es decir el conjunto $VIM \subset V$ de mayor cardinalidad para el cual ninguna de sus aristas se encuentre en E ($\forall u, v \in VIM \Longrightarrow \{u, v\} \notin E$).