# Tema 8: Redes Neuronales

*Pedro Larrañaga, Iñaki Inza, Abdelmalik Moujahid*

Intelligent Systems Group

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad del País Vasco

http://www.sc.ehu.es/isg/

# Redes Neuronales

- Introducción
- Sistema Neuronal Artificial
- El Asociador Lineal
- El Perceptrón Simple
- La Adalina
- El Perceptrón Multicapa

# Introducción

- Redes neuronales (artificiales) paradigma muy popular en Inteligencia Computacional
- En el tema se verán diferentes modelos para clasificación supervisada
- Alta capacidad de predecir correctamente la clase
- Baja transparencia
- Historia de las redes neuronales como el Ave Fenix

# Sistema Neuronal Artificial

- Ramón y Cajal (1888): sistema nervioso compuesto de red de neuronas interconectadas entre si
- $100 \cdot 10^6$ neuronas en el cerebro. Procesadores de información
- Neurona:
  - Cuerpo celular o soma (10 a 80 micras)
  - Del soma surge un árbol de ramificaciones (árbol dendítrico)
  - Del soma parte una fibra tubular (axón) (100 micras hasta el metro)
  - El axón se ramifica en su extremo para conectarse con otras neuronas

# Sistema Neuronal Artificial

Neurona como procesador de información:

- Dendritas canal de entrada de información
- Soma como órgano de cómputo
- Axón como canal de salida. Recibe impulso de unas 10000 neuronas. Envia impulso a cientos de neuronas
- Algunas neuronas reciben información del exterior

# Sistema Neuronal Artificial

El cerebro: cualidades innatas + modelización:

- establecimiento de nuevas conexiones
- ruptura de conexiones
- modelado de las intensidades sinápticas (uniones entre neuronas)
- muerte o reproducción neuronal

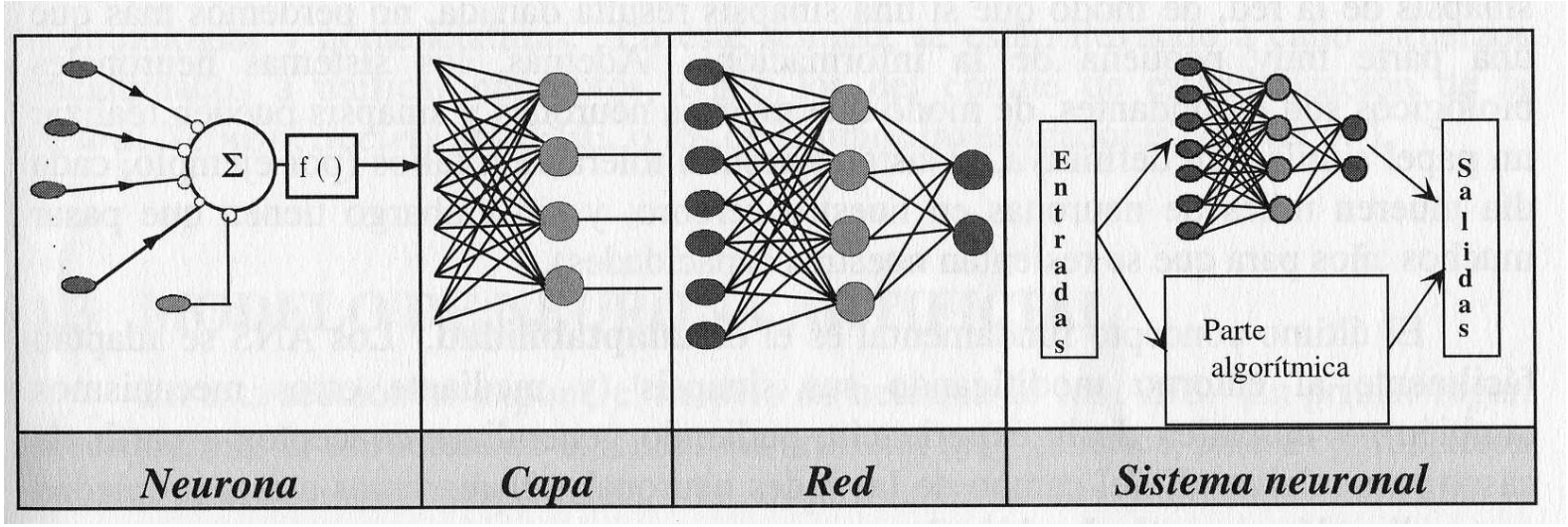
# Sistema Neuronal Artificial

Tres conceptos clave a emular:

- *Procesamiento paralelo*
  - Intervención de miles de millones de neuronas
- *Memoria distribuida*
  - En un computador la información está en posiciones de memoria bien definidas
  - En redes neuronales biológicas la información está distribuida por la sinapsis de la red
  - Redundancia para evitar pérdida de información al resultar dañada una sinapsis
- *Adaptabilidad al entorno*
  - Por medio de la información de las sinapsis
  - Aprender de la experiencia
  - Posible generalizar conceptos a partir de casos particulares

# Sistema Neuronal Artificial

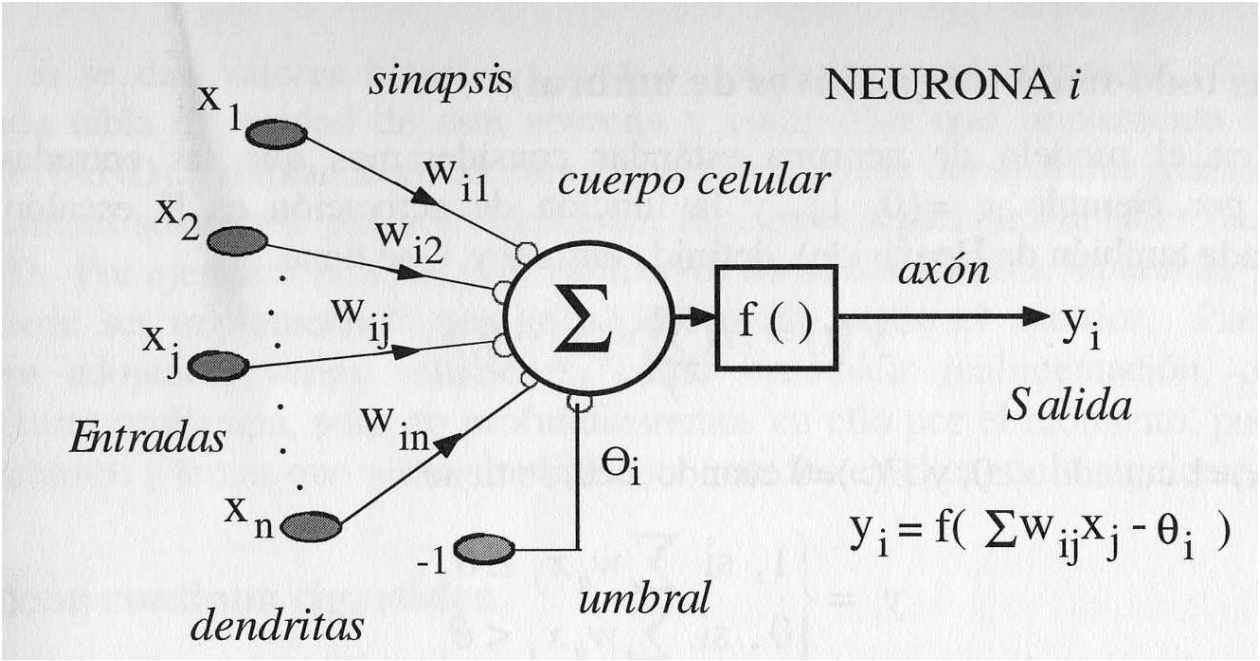
*El modelo estándard de neurona artificial*
Rumelhart y McClelland (1986) y McClelland y Rumelhart (1986)




Sistema global de proceso de una red neuronal

# Sistema Neuronal Artificial

*El modelo estándard de neurona artificial*
Rumelhart y McClelland (1986) y McClelland y Rumelhart (1986)




Modelo de neurona artificial standard

# Sistema Neuronal Artificial

- *Conjunto de entradas* $X_j$ y unos *pesos sinápticos* $w_{ij}$, con $j = 1, \ldots, n$
- *Regla de propagación* $h_i(x_1, \ldots, x_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_j$
  $\theta_i$ umbral, el cual se acostumbra a restar al potencial pos-sináptico

$$h_i(x_1, \ldots, x_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}) = \sum_{j=0}^{n} w_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i$$

- Una *función de activación*, la cual representa simultáneamente la salida de la neurona y su estado de activación

$$y_i = f_i(h_i) = f_i(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} x_j)$$

# Sistema Neuronal Artificial

Ejemplos de funciones de activación

- *Neuronas todo-nada*

  $f_i(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j - \theta_i)$ es una función escalonada

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j \geq \theta_i \\ 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j < \theta_i \end{cases}$$

# Sistema Neuronal Artificial

Ejemplos de funciones de activación

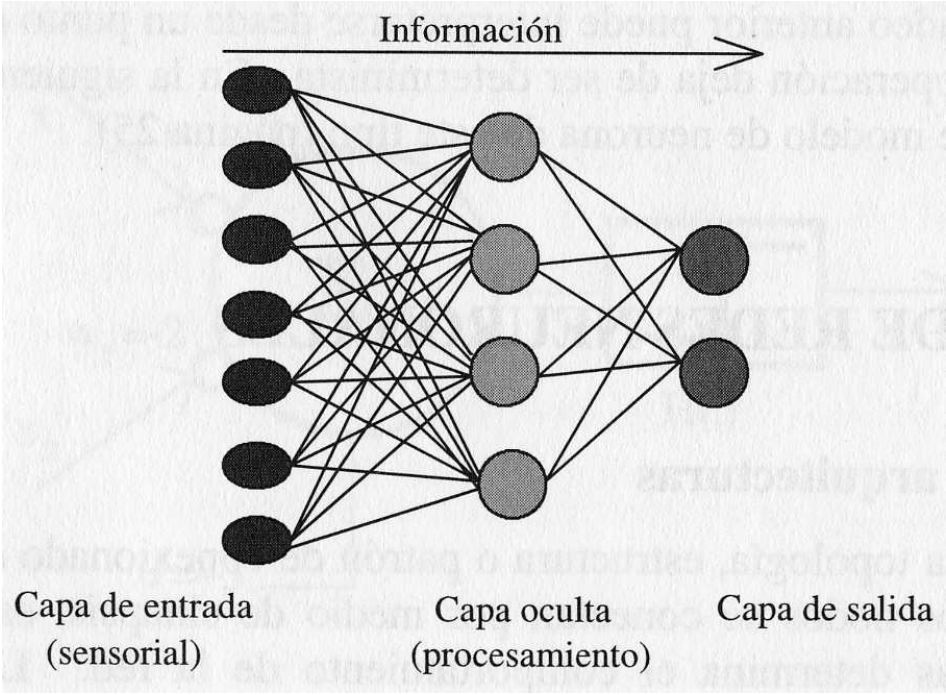
- *Neurona continua sigmoidea*

$$y_i = \frac{1}{1 + e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)}}, \text{ con } y_i \in [0, 1]$$

$$y_i = \frac{e^{\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)} - e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)}}{e^{\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)} + e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)}}, \text{ con } y_i \in [-1, 1]$$

# Sistema Neuronal Artificial

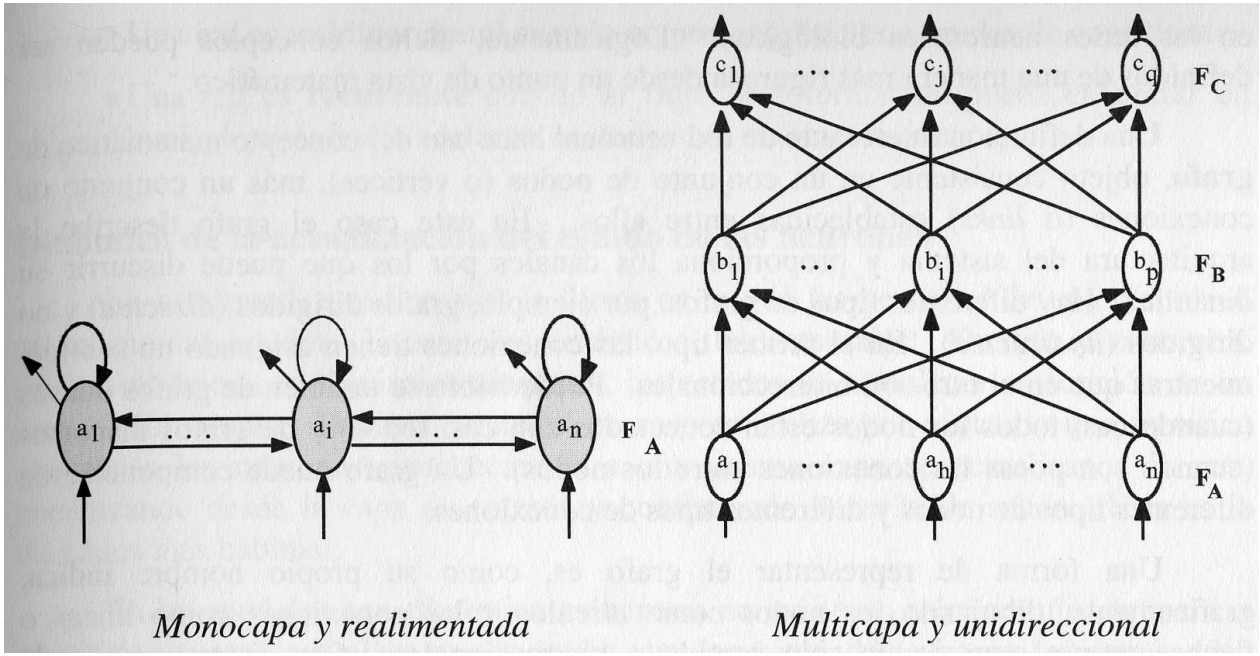
## *Arquitecturas de redes neuronales*




Arquitectura unidireccional con tres capas de neuronas: una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida

# Sistema Neuronal Artificial

## *Arquitecturas de redes neuronales*




Diferentes arquitecturas de redes neuronales

# Sistema Neuronal Artificial

*Definición de una red neuronal artificial*

Grafo dirigido:

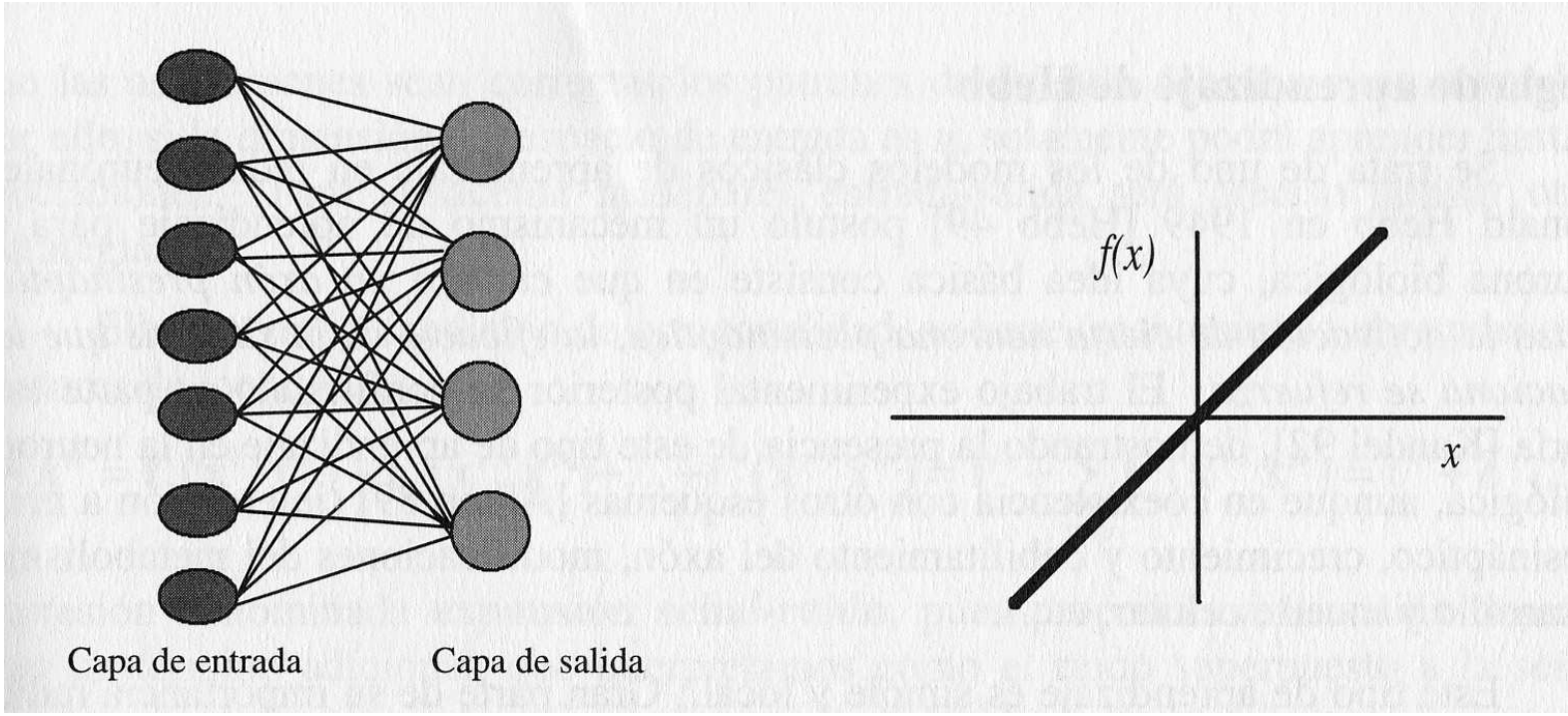
(i) A cada nodo (neurona) $i$ se le asocia una variable de estado $X_i$

(ii) A cada conexión $(i, j)$ entre los nodos (neuronas) $i$ y $j$ se le asocia un peso $w_{ij} \in \mathbb{R}$

(iii) A cada nodo (neurona) $i$ se le asocia un umbral $\theta_i \in \mathbb{R}$

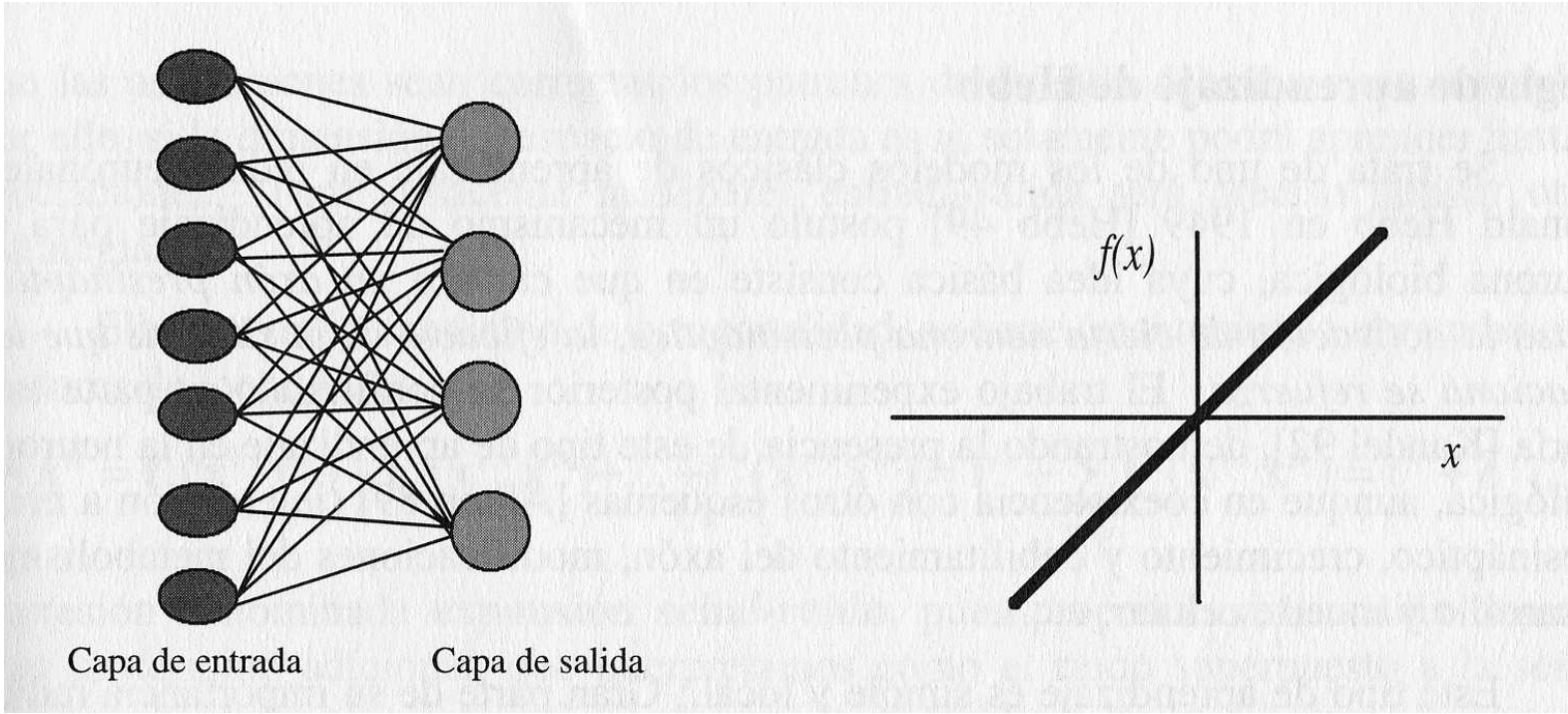
(iv) Para cada nodo $i$ se define una función $f_i(x_1, \ldots, x_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}, \theta_i)$ que depende de los pesos de sus conexiones, del umbral y de los estados de los nodos $j$ que estén conectados con el nodo $i$. El valor de esta función proporciona el nuevo estado del nodo

# El Asociador Lineal




Arquitectura (izquierda) y función de activación (derecha) del asociador lineal

# El Asociador Lineal




Arquitectura (izquierda) y función de activación (derecha) del asociador lineal

# El Asociador Lineal

- Unicamente dos capas de neuronas:
  Entradas $x_1, \ldots, x_n$
  Salidas $y_1, \ldots, y_m$
- $W \in M(m,n)$ matriz de pesos sinápticos, con elementos $w_{ij}$ con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$
- La operación efectuada por el asociador lineal es:

  $$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) = W\mathbf{x} = W(x_1, \ldots, x_n)$$

  o bien $y_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$, con $i = 1, \ldots, m$
- Potencial pos-sináptico por medio de la suma ponderada, posteriormente una función de activación identidad

# El Asociador Lineal

- Aprender a asociar $N$ pares entrada-salida

$$D = \{(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r), r = 1, \ldots, N\}$$

  ajustando la matriz de pesos $W$
- Ante entradas similares a $\mathbf{x}^r$ responda con salidas similares a $\mathbf{y}^r$
- El problema radica en encontrar la matriz de pesos $W$ óptima en el sentido anterior
- Regla de aprendizaje, que a partir de las entradas y de las salidas deseadas proporcione el conjunto óptimo de pesos $W$

# El Asociador Lineal

- *Aprendizaje Hebbiano* (Hebb, 1949): cuando un axón presináptico causa la activación de cierta neurona pos-sináptica, la eficacia de la sinapsis que las relaciona se refuerza
- Aprendizaje es simple y local. Pionero en neurocomputación
- Modificación de pesos, $\Delta w_{ij}$, proporcional al producto de una entrada $x_j$ y de una salida $y_i$ de la neurona
- $\Delta w_{ij} = \varepsilon y_i x_j$, donde a $0 < \varepsilon < 1$ se le denomina *ritmo de aprendizaje*
- Para el ejemplo $(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r)$ la regla de actualización de pesos es:

$$w_{ij}^{new} = w_{ij}^{old} + \Delta w_{ij}^r$$

$$\text{con } \Delta w_{ij}^r = \varepsilon y_i^r x_j^r$$

# El Asociador Lineal

- Deducir los *algoritmos de aprendizaje* a partir de un cierto criterio a optimizar
- Proponer un *criterio que mida el rendimiento de la red neuronal* para encontrar una regla de actualización de pesos que la optimice
- *Error cuadrático medio* de las salidas actuales de la red respecto de las deseadas

$$\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}||\mathbf{y}^r - W\mathbf{x}^r|| = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i^r - Wx_j^r)^2$$

- El problema del aprendizaje de los pesos de la red neuronal se transforma en el de obtener un conjunto de pesos que minimicen la expresión anterior

# El Asociador Lineal

- Error cuadrático medio:

$$\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}||\mathbf{y}^r - W\mathbf{x}^r|| = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i^r - Wx_j^r)^2$$

- $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N)$, una matriz $n \times N$ que tiene por columnas los vectores de entrada
- $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^N)$ una matriz $m \times N$ cuyas columnas son los vectores de salida
- Error cuadrático medio:

$$\frac{1}{N}\|\mathbf{Y} - W\mathbf{X}\|$$

- La minimización de la expresión anterior cuando $W = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T$
- Una regla de aprendizaje: $W = \mathbf{Y}\mathbf{X}^+$, donde $\mathbf{X}^+$ denota la matriz pseudoinversa de $\mathbf{X}$

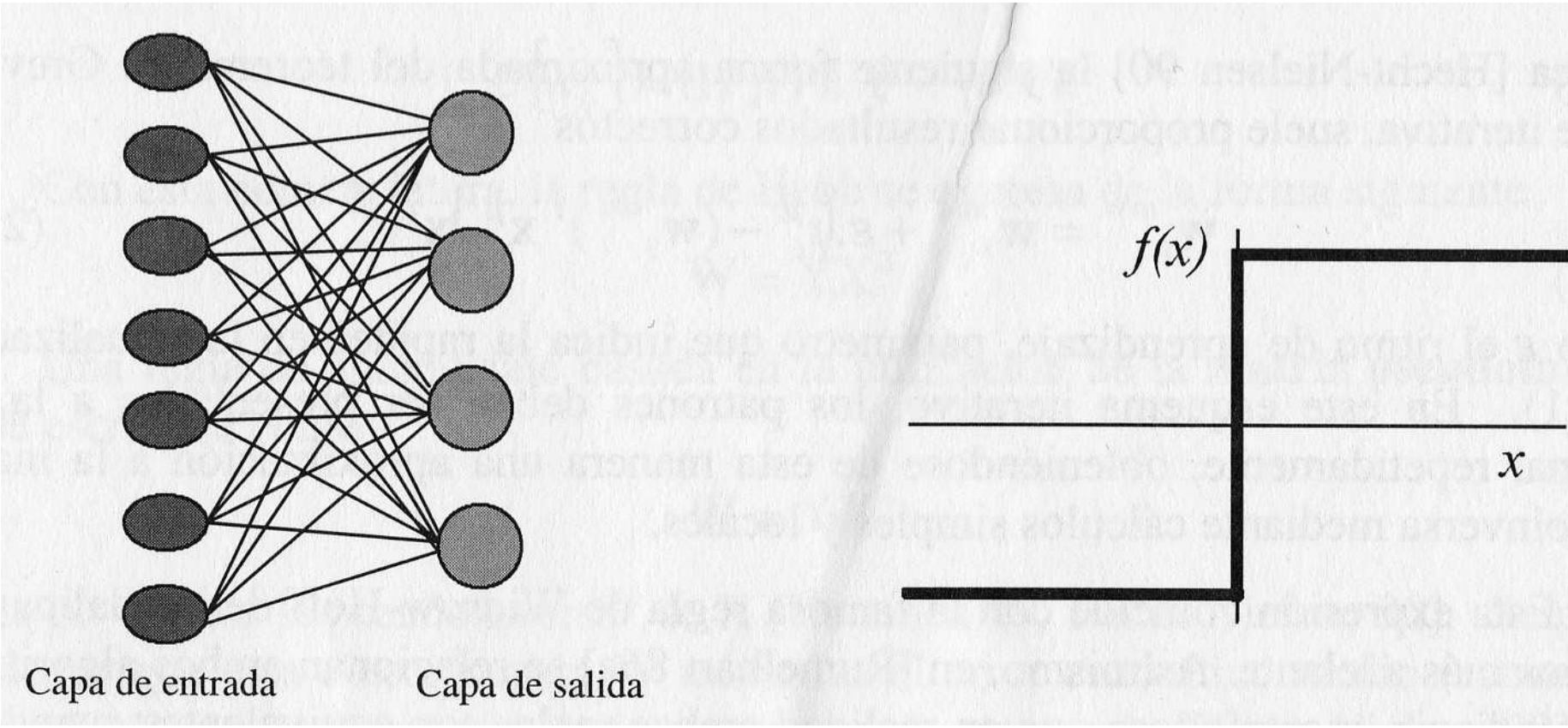
# El Perceptrón Simple

- El perceptrón (Rosenblatt, 1962) modelo unidireccional compuesto por dos capas de neuronas, una de entrada y otra de salida
- $n$ neuronas de entrada y $m$ neuronas de salida se puede expresar como:

$$y_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j - \theta_i\right)$$

  con $i = 1, \ldots, m$
- Neuronas de entrada son discretas
- Función de activación de las neuronas de la capa de salida es de tipo escalón
- Dispositivo entrenable: determinar automáticamente los pesos sinápticos que clasifican un conjunto de patrones etiquetados

# El Perceptrón Simple




Arquitectura (izquierda) y función de transferencia (derecha) de un perceptrón simple

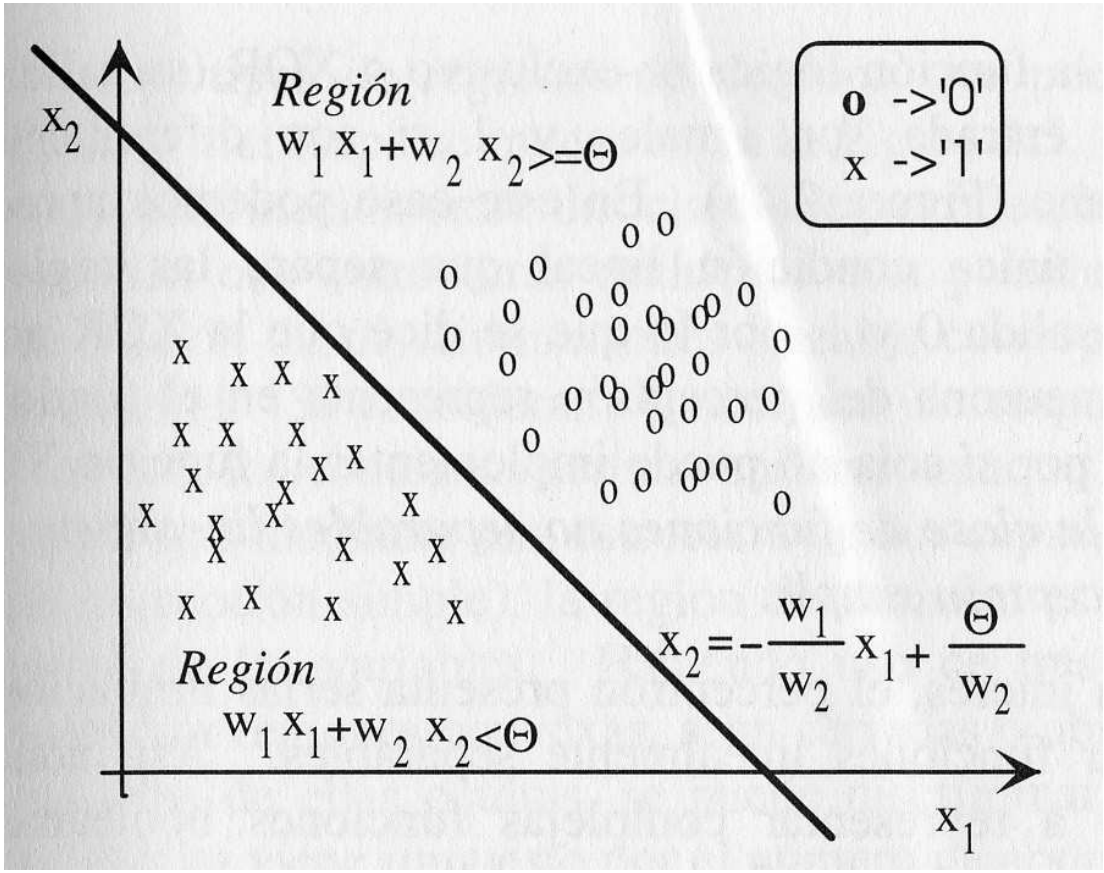
# El Perceptrón Simple

- El perceptrón simple tan sólo puede discriminar entre dos clases linealmente separables
- Ejemplo: $x_1$ y $x_2$ dos neuronas de entrada, la operación efectuada por el perceptrón simple consiste en:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } w_1 x_1 + w_2 x_2 \geq \theta \\ 0 & \text{si } w_1 x_1 + w_2 x_2 < \theta \end{cases}$$

- Si consideramos $x_1$ y $x_2$ situadas sobre los ejes de abcisas y ordenadas respectivamente, la condición $w_1 x_1 + w_2 x_2 - \theta = 0$ es equivalente a $x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 + \frac{\theta}{w_2}$ y representa una recta que define la región de decisión determinada por el perceptrón simple
- Minsky y Papert (1969) trabajo exponiendo las limitaciones del perceptrón simple, como consecuencia recursos de las redes neuronales a otros campos de la Inteligencia Artificial

# El Perceptrón Simple




Región de decisión correspondiente a un perceptrón simple con dos neuronas de entrada

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*

- Pertenece al grupo de algoritmos fundamentados en la *corrección de errores*
- $\mathbf{x}^r$ conjunto de patrones de entrada, $r = 1, \ldots, N$
- $c^r$ conjunto de clases verdaderas de dichos patrones, $r = 1, \ldots, N$
- Variables de entrada como las de salida toman dos posibles valores: $-1$ y $+1$

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*

- Actualización de pesos:
  - Si ante la presentación del $r$-ésimo patrón la respuesta que proporciona el perceptrón simple es correcta, no actualizaremos los pesos
  - Si la respuesta es incorrecta los pesos se modificarán según la regla de Hebb
- Es decir:

$$\Delta w_{ij}^r(t) = \begin{cases} 2\varepsilon {c_i}^r {x_j}^r & \text{si } {y_i}^r \neq {c_i}^r \\ 0 & \text{si } {y_i}^r = {c_i}^r \end{cases}$$

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*

- La regla anterior se puede reescribir:

$$\Delta w_{ij}^{r}(t) = \varepsilon({c_i}^{r} - {y_i}^{r}){x_j}^{r}$$

- La actualización de pesos únicamente podrá tomar los valores $-2\varepsilon$, $0$ y $+2\varepsilon$
- A nivel práctico llegar a un compromiso para el valor del ritmo de aprendizaje, $\varepsilon$
  - Valor pequeño de $\varepsilon$ implica un aprendizaje lento
  - Valor excesivamente grande de $\varepsilon$ puede conducir a oscilaciones excesivas de los pesos no aconsejables en el proceso de entrenamiento

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*

- El proceso de aprendizaje es *iterativo*
- Configuración sináptica inicial con *pesos pequeños aleatorios*
- Se presentan los *patrones una y otra vez*, con objeto de que los pesos se ajusten iterativamente según la regla anterior:

$$\Delta w_{ij}^{r}(t) = \varepsilon({c_i}^r - {y_i}^r){x_j}^r$$

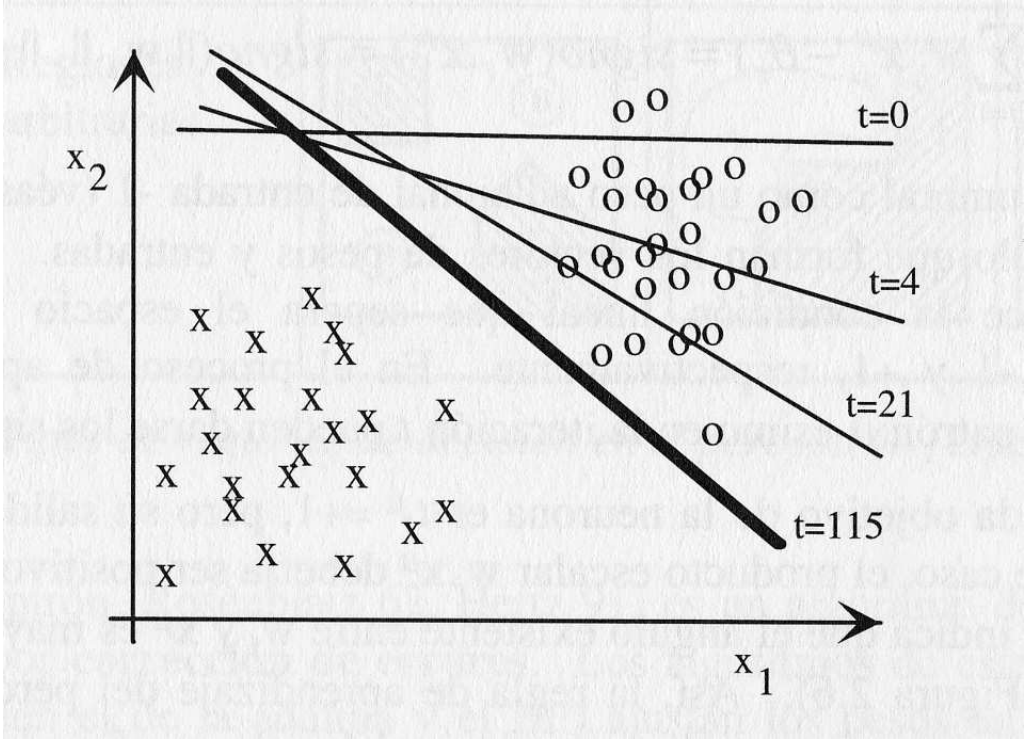
- El *ajuste de los pesos* en la iteración $t$ debido a *todo el conjunto de aprendizaje* será:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \sum_{r=1}^{N} \Delta {w_{ij}}^r(t)$$

- Hasta que *todos los patrones queden bien clasificados* si es posible

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*




Evolución de las regiones de decisión establecidas por el perceptrón simple

# El Perceptrón Simple

*Algoritmo de Aprendizaje (Rosenblatt, 1962)*

- Rosenblatt (1962) demostró que:
  - *Si la función a representar es linealmente separable*, el algoritmo anterior siempre converge en un tiempo finito y con independencia de los pesos de partida
  - *Si la función a representar no es linealmente separable*, el proceso de entrenamiento oscilará
- El algoritmo para cuando consigue clasificar correctamente todos los ejemplos
- Puede ocurrir que línea de discriminación quede muy cerca de las muestras de uno de los grupos

# La Adalina

*ADAptative LInear Neuron (Adalina), Widrow y Hoff (1960)*

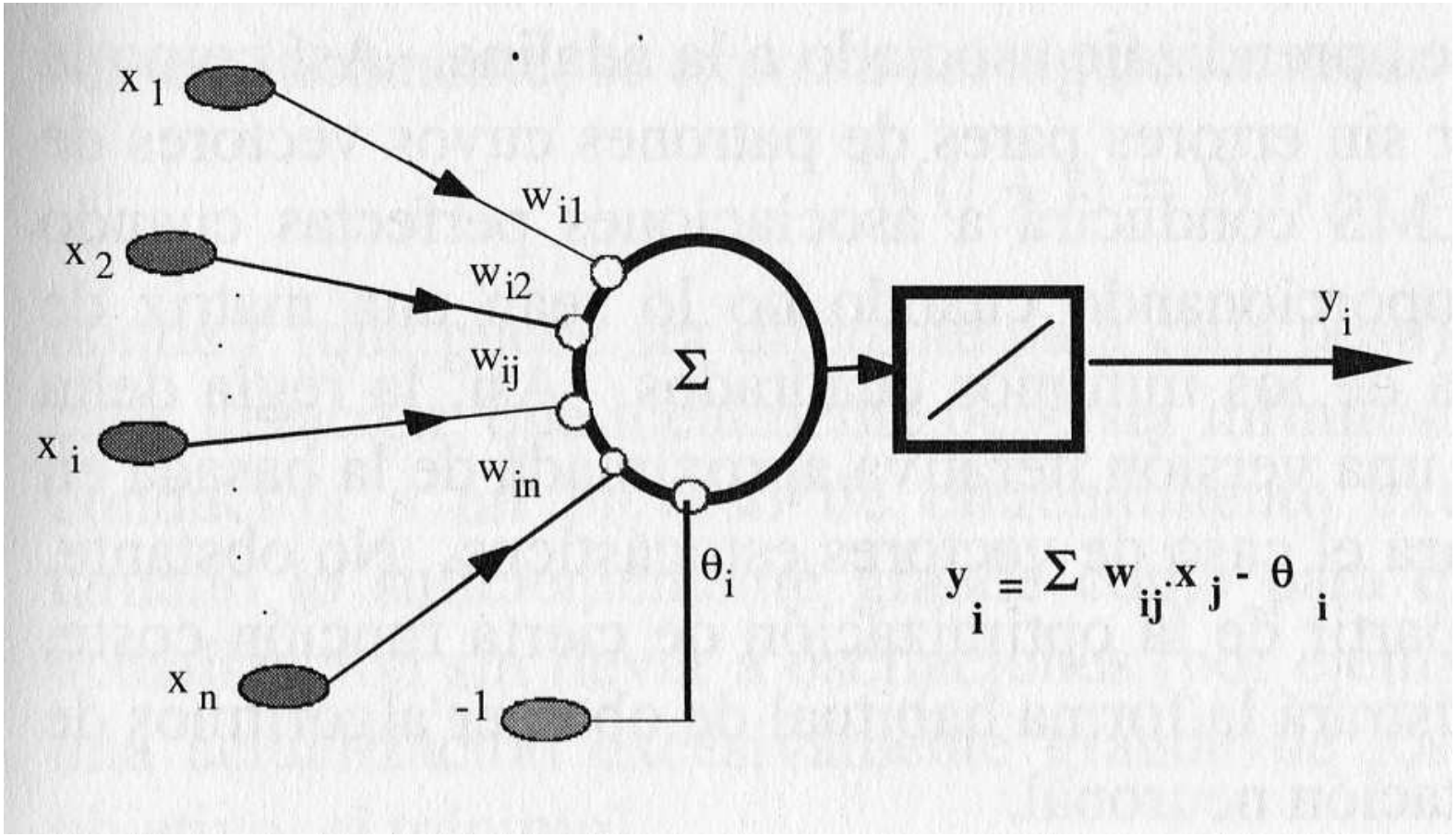
- Entradas pueden ser continuas
- Neurona similar a la del perceptrón simple con función de activación lineal

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i$$

con $i = 1, \ldots, m$

- $\theta_i$, *bias*, parámetro que proporciona un grado de libertad adicional al modelo (no umbral de disparo)

# La Adalina




Neurona lineal de la Adalina

# La Adalina

- Incorpora aspectos del asociador lineal y del perceptrón simple
- Diferencia en el aprendizaje
  - Regla actualización de pesos LMS (*least mean square*)
  - Adaptar los pesos de manera proporcional al error cometido

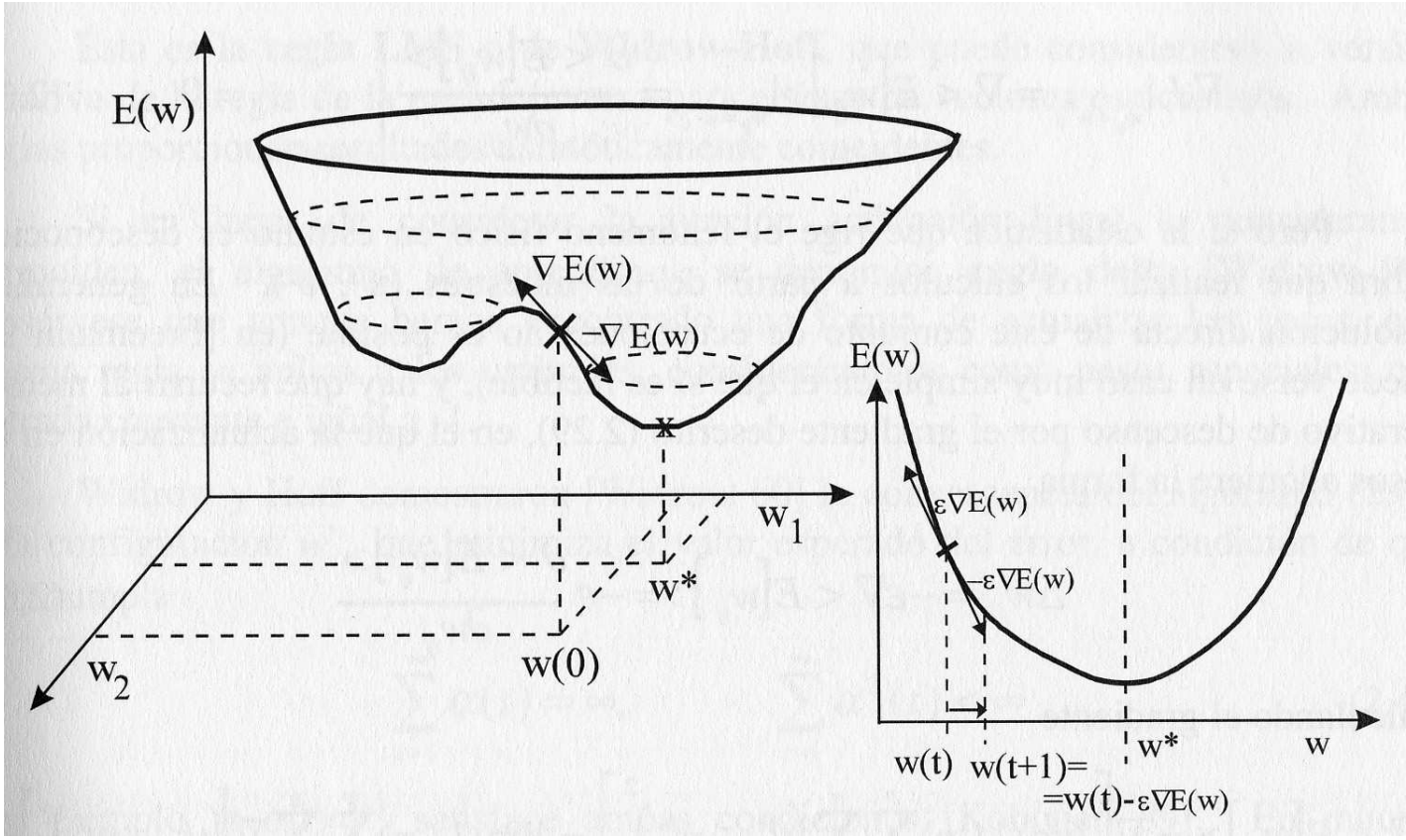
# La Adalina

- Aprendizaje de los pesos como un problema de optimización de una determinada función de coste
- Método de optimización es el *descenso por el gradiente* del error actual cometido por la red neuronal
- Optimizador local en un espacio continuo

$$E : \mathbb{R}^{(n\times m)+m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w_{11},\ldots,w_{1n},\ldots,w_{m1},\ldots,w_{mn},\theta_1,\ldots,\theta_m) \longrightarrow E(w_{11},\ldots,w_{1n},\ldots,w_{m1},\ldots,w_{mn},\theta_1,\ldots,\theta_m)$$

# La Adalina




Superficie de error $E(w)$ en el espacio de pesos (izquierda) y método de descenso por el gradiente (derecha) en el que se basa la regla de aprendizaje de la Adalina

# La Adalina

*Descenso por el gradiente*

1. Partir en $t = 0$ de una cierta configuración de peso $\mathbf{w}^0$
2. Calcular la dirección de la máxima variación de la función $E(\mathbf{w})$ en $\mathbf{w}^0$, la cual vendrá dada por su gradiente en $\mathbf{w}^0$
3. Modificar los parámetros $\mathbf{w}$ siguiendo el sentido opuesto al indicado por el gradiente de $E(\mathbf{w})$
4. Iterar los pasos 2 y 3 hasta alcanzar un óptimo local

# La Adalina

- Función de coste a minimizar: $E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(c_i^r - y_i^r)^2$
- La función de error mide el error cuadrático correspondiente a las salidas actuales de la red respecto de los objetivos
- Teniendo en cuenta que $y_i^r = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j^r - \theta_i$, se obtiene:

$$\frac{\partial E(w_{ij})}{\partial w_{ij}} = -\left(\frac{1}{2}\right)2\sum_{r=1}^{N}(c_i^r - y_i^r)\frac{dy_i^r}{dw_{ij}} = -\sum_{r=1}^{N}(c_i^r - y_i^r)\,x_j^r$$

- Regla de adaptación LMS:

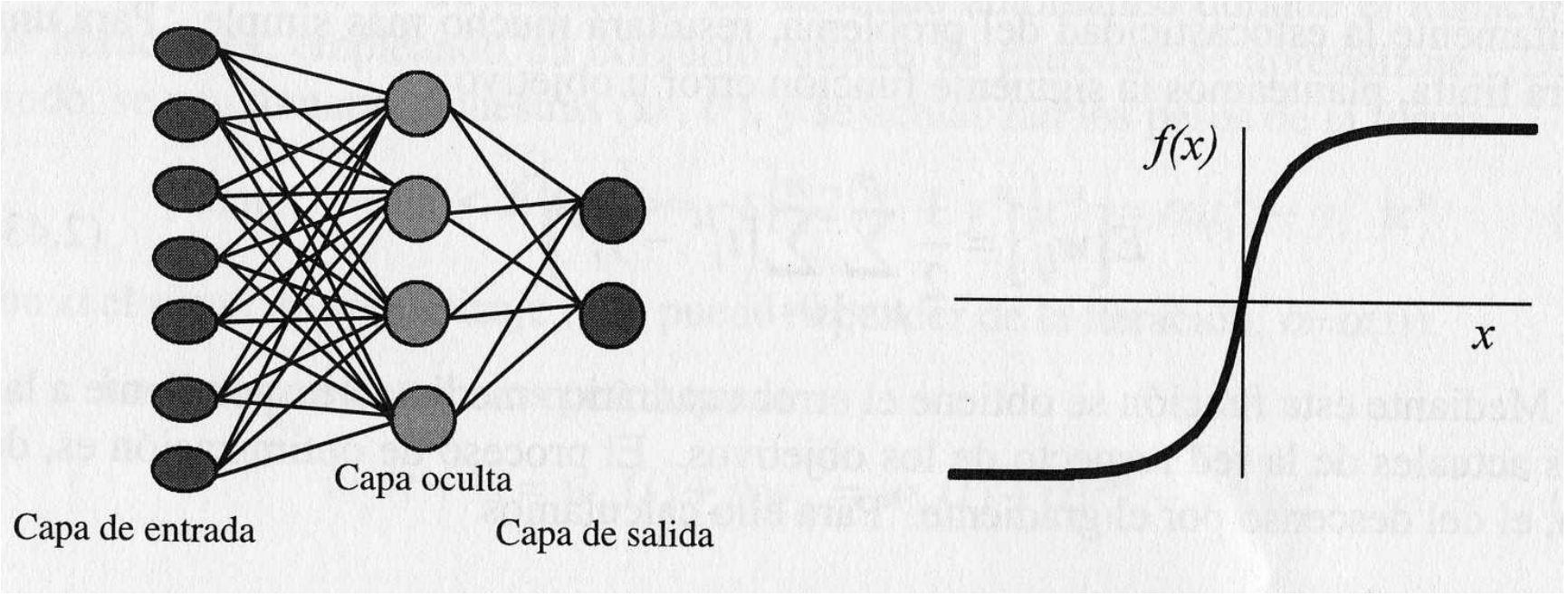
$$\Delta w_{ij} = -\varepsilon\frac{\partial E(w_{ij})}{\partial w_{ij}} = \varepsilon\sum_{r=1}^{N}(c_i^r - y_i^r)\,x_j^r$$

- Adalina adaptaciones continuas de los pesos derivadas de la función de activación lineal

# El Perceptrón Multicapa

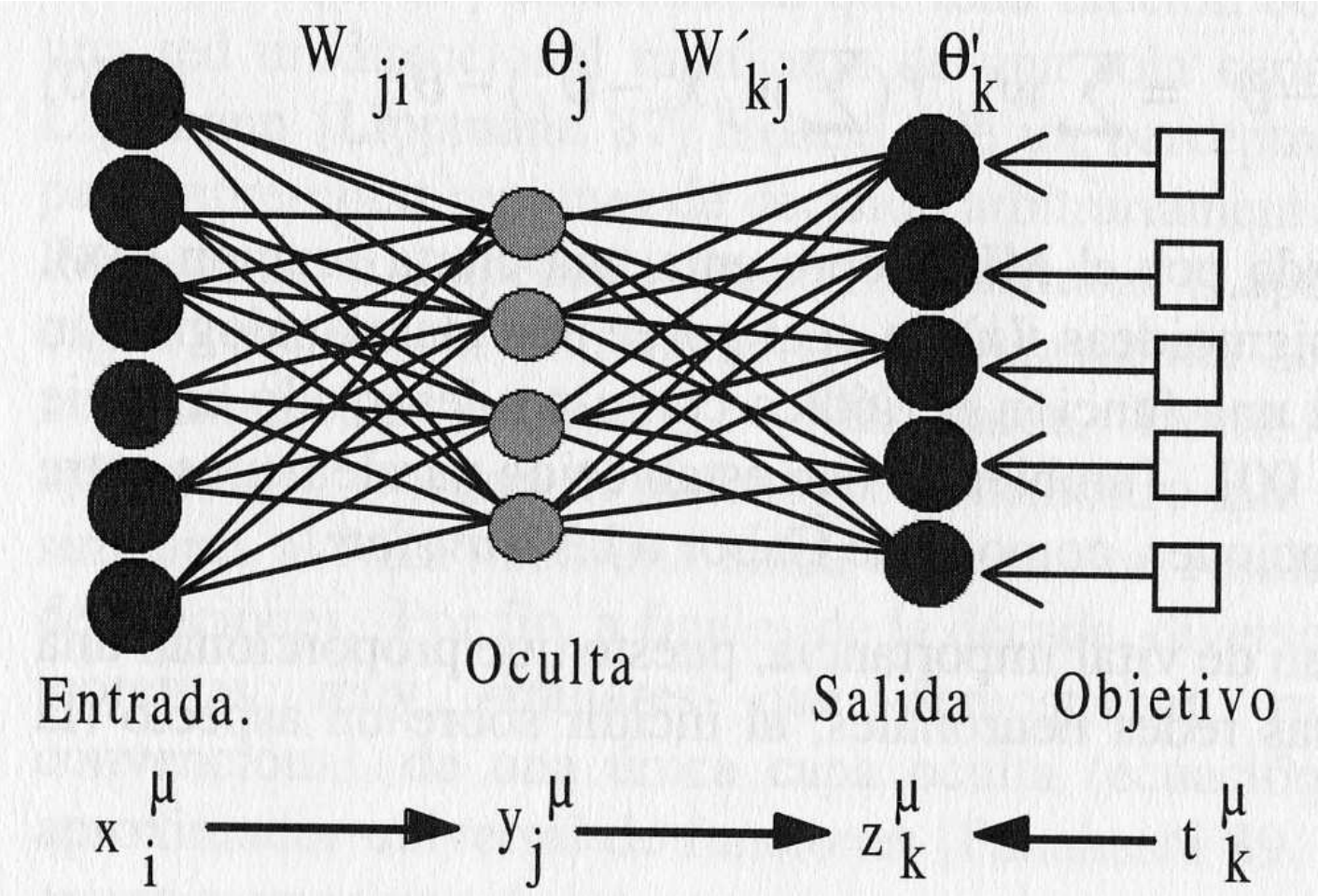
- Perceptrón simple limitaciones, tan sólo discriminar patrones separados por un hiperplano
- Incluyendo capas ocultas superar dichas limitaciones
- Perceptrón multicapa *MultiLayer Perceptron (MLP)*
- Algoritmo de entrenamiento basado en la retropropagación del error *Back–Propagation (BP)* (Werboz, 1974 y Rumelhart y col., 1986)

# El Perceptrón Multicapa



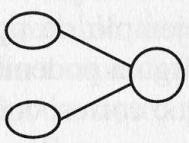
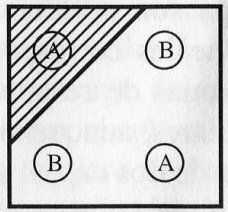
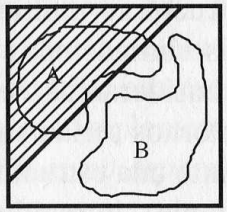
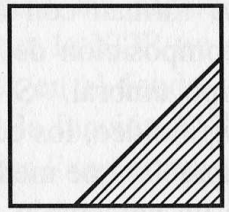
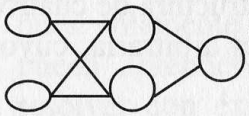
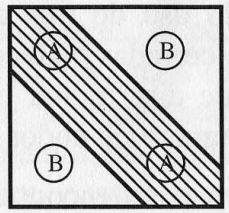
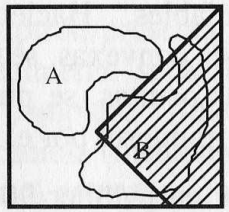
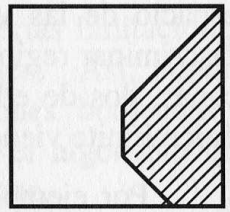
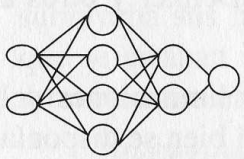
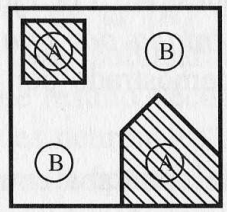
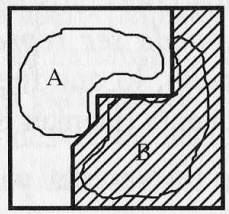
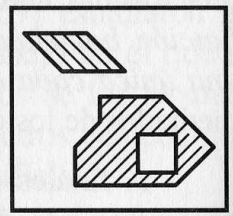

Arquitectura (izquierda) y función de activación (derecha) para el perceptrón multicapa

# El Perceptrón Multicapa




Arquitectura del perceptrón multicapa

# El Perceptrón Multicapa

| Arquitectura | Región de decisión | Ejemplo 1: XOR | Ejemplo 2: clasificación | Regiones más generales |
|---|---|---|---|---|
| Sin capa oculta  | Hiperplano (dos regiones) |   |   |  |
| Una capa oculta  | Regiones polinomiales convexas |   |   |  |
| Dos capas ocultas  | Regiones arbitrarias |   |   |  |

Regiones de decisión obtenidas para el perceptrón simple (arriba), el perceptrón multicapa con una capa oculta (en medio) y el perceptrón multicapa cn dos capas ocultas (abajo)

# El Perceptrón Multicapa

- $x_i$ con $i = 1, \ldots n$ neuronas de entrada de la red
- $y_j$ con $j = 1, \ldots o$ neuronas de la capa oculta
- $z_k$ con $j = 1, \ldots s$ neuronas de la capa final
- $c_k$ con $j = 1, \ldots s$ salidas objetivo (variable clase)
- $w_{ij}$ pesos conectando neuronas de entrada con neuronas de capa oculta
- $\theta_j$ umbrales de las neuronas de la capa oculta
- $w'_{kj}$ pesos conectando neuronas de capa oculta con neuronas de salida
- $\theta'_k$ umbrales de las neuronas de salida

# El Perceptrón Multicapa

- MLP con una única capa oculta
- Función de activación para la capa oculta de tipo sigmoide
- Función de activación para la capa final de tipo lineal

$$z_k = \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j - \theta'_k = \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} f\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i - \theta_j\right) - \theta'_k$$

con $k = 1, \ldots s$ y $f(x)$ función de tipo sigmoide

# El Perceptrón Multicapa

Retropropagación del error (*Back Propagation (BP)*)

- $E(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} (c_k^r - z_k^r)^2$
  con $z_k^r = \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k = \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} f\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j\right) - \theta'_k$
- Minimización por descenso por el gradiente

$$\Delta w'_{kj} = \varepsilon \sum_{r=1}^{N} \left( c_k^r - \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) \right)^2 y_j^r$$

$$\Delta w_{ji} = \varepsilon \sum_{r=1}^{N} \Delta_j^r x_i^r$$

$$\text{con } \Delta_j^r = \left( \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) w'_{kj} \right) \frac{\partial f\left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}{\partial \left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}$$

# El Perceptrón Multicapa

Algoritmo de aprendizaje(*Back Propagation (BP)*)

Paso 1. Establecer aleatoriamente los pesos y umbrales iniciales ($t := 0$)

Paso 2. Para cada patrón $r$ del conjunto de entrenamiento

2.1 Obtener la respuesta de la red frente al patrón $r$-ésimo

2.2 Calcular las señales de error asociadas $\left( c_k^r - \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) \right)$ y

$$\left( \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) w'_{kj} \right) \frac{\partial f \left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}{\partial \left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}$$

2.3 Calcular el incremento parcial de los pesos y umbrales debidos al patrón $r$

Paso 3. Calcular el incremento total actual, extendido a todos los patrones, de los pesos $\Delta w'_{kj}$ y $\Delta w_{ji}$. Hacer lo mismo con los umbrales

Paso 4. Actualizar pesos y umbrales

Paso 5. Calcular el error total

Hacer $t := t + 1$ y volver al Paso 2 si todavía el error total no es satisfactorio

# El Perceptrón Multicapa

- Implícito en el BP el concepto de propagación hacia atrás
- $\left( c_k^r - \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) \right)$ señales de error en la salida de la red se usan para calcular $\Delta w'_{kj}$
- Estas señales de error se propagan hacia atrás, obteniéndose la señal de error en la capa oculta

$$\left( \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{j=1}^{o} w'_{kj} y_j^r - \theta'_k \right) w'_{kj} \right) \frac{\partial f \left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}{\partial \left( \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i^r - \theta_j \right)}$$

- Con esta señal de error se calcula $\Delta w_{ji}$