

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

1 Introducción

En el tema anterior hemos visto como estimar puntualmente parámetros de distribuciones estadísticas. Dichas estimaciones se obtenían al sustituir en la función estimador los valores obtenidos en una muestra aleatoria simple. Es obvio que si obtuviésemos una nueva muestra aleatoria simple extraída de la misma población anterior e incluso del mismo tamaño, el valor del estimador, es decir la estimación, no tendría necesariamente que coincidir. Esta es la principal razón por la que el concepto de estimación puntual debe de ser extendido de manera que contemple la problemática anterior.

Una manera natural de llevar a cabo dicha extensión es por medio de los denominados intervalos de confianza, dando origen a la estimación por intervalos. La idea es simple. En lugar de determinar un valor numérico para cada parámetro de interés, se trata de proporcionar un intervalo en el cual depositamos nuestra confianza acerca de la pertenencia del parámetro a dicho intervalo.

En este tema, una vez introducido el concepto de intervalo de confianza, se obtendrán los intervalos de confianza correspondientes a distintos parámetros: p de una distribución de Bernoulli, μ y σ^2 de distribuciones normales, así como para la esperanza matemática de una distribución cualquiera, en este último caso con tamaños muestrales suficientemente grandes.

2 Concepto de intervalo de confianza

Supongamos que estamos interesados en el tiempo de ejecución de un algoritmo estocástico, y después de realizar 100 ejecuciones el tiempo medio ha sido de 60 segundos. Según lo visto en el tema anterior podemos afirmar que una estimación puntual de la esperanza matemática de la variable Tiempo es 60 segundos.

Conscientes de que si volvemos a repetir otras 100 ejecuciones del algoritmo, el tiempo medio no tiene porque ser 60 segundos, nuestro interés en este tema se centra en obtener un intervalo en el que con una cierta probabilidad se encuentre el verdadero valor del parámetro¹. Por ejemplo, tratamos de obtener resultados del tipo: "podemos afirmar con una probabilidad del 95 por ciento que el verdadero valor del parámetro se encuentra en el intervalo (54 sg.; 66 sg.)". Parece intuitivo que si quisiésemos aumentar la confianza depositada en el intervalo, manteniendo el número de ejecuciones, deberíamos de aumentar la amplitud del intervalo. Por ejemplo, diríamos que: "podemos afirmar con una probabilidad del 98 por ciento que el verdadero valor del parámetro se encuentra en el intervalo (50 sg.; 70 sg.)". No menos intuitivo es el hecho de que al reducir el número de ejecuciones para seguir manteniendo la misma confianza en el intervalo debemos de aumentar su amplitud. Por ejemplo si 60 sg. ha resultado ser el tiempo de ejecución medio obtenido a partir de 10 ejecuciones, el intervalo en el que depositamos una confianza del 95 por ciento debe de incluir al intervalo (54 sg.; 66 sg.).

Veamos con más rigor el concepto anterior.

DEFINICIÓN 2.1

Sea X una variable aleatoria con ley de probabilidad conocida, dependiente de un parámetro θ desconocido. A partir de una muestra aleatoria simple, $x_1, \dots, x_n$, extraída de X tratamos de estimar θ por medio de un intervalo $(T_1(x_1, \dots, x_n); T_2(x_1, \dots, x_n))$ de tal forma que:

$$P(T_1(x_1, \dots, x_n) < \theta < T_2(x_1, \dots, x_n)) = 1 - \alpha. \quad (1)$$

¹Dicho verdadero valor va a permanecer desconocido y no accesible. Diremos que está en el *Olimpo*. De ahí las letras griegas para denotar los parámetros.

Al intervalo $(T_1(x_1, \dots, x_n); T_2(x_1, \dots, x_n))$ se le denomina *intervalo de confianza* para el parámetro θ , mientras que $1-\alpha$ es el *nivel de confianza* del intervalo. La cantidad $(T_2(x_1, \dots, x_n) - T_1(x_1, \dots, x_n))$ es la *longitud del intervalo*.

La interpretación habitual del nivel de confianza suele ser frecuentista. Es decir si establecemos el nivel de confianza en 95%, entendemos que si por ejemplo extrayésemos 1000 muestras de tamaño 100 cada una, esperamos que aproximadamente en 950 de ellas los intervalos de confianza cubran el verdadero valor del parámetro. Valores utilizados para α son: $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$ con lo cual los intervalos de confianza obtenidos tendrán niveles de confianza de 0.95 o 0.99 respectivamente.

Las intuiciones comentadas en este apartado, una vez vista la definición, las podemos expresar de la siguiente manera:

- Si n permanece fijo y $(1 - \alpha)$ aumenta, entonces $(T_2(x_1, \dots, x_n) - T_1(x_1, \dots, x_n))$ aumenta.
- Si $(1 - \alpha)$ permanece fijo y n disminuye entonces $(T_2(x_1, \dots, x_n) - T_1(x_1, \dots, x_n))$ aumenta.

3 Distribuciones asociadas al muestreo

En este apartado introduciremos dos distribuciones asociadas al muestreo: la distribución *chi-cuadrado* (χ_n^2) y la distribución *t* de Student (t_n). Ambas distribuciones están basadas en la distribución normal y constituyen la base del teorema de Fisher que enunciaremos a continuación. El resultado del teorema de Fisher es importante por cuanto que los intervalos de confianza para los parámetros de la distribución normal se obtienen de su aplicación directa.

DEFINICIÓN 2.2

Sean $X_1, \dots, X_n$, n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, siguiendo una ley $\mathcal{N}(0, 1)$. La variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$ sigue una distribución *chi-cuadrado* (χ_n^2) con n grados de libertad.

La función de densidad de una distribución *chi-cuadrado* (χ_n^2) es:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (2)$$

con $x \in \mathbb{R}^+$.

Se verifica que: $E[\chi_n^2] = n$ y $Var[\chi_n^2] = 2n$.

DEFINICIÓN 2.3

Sean $X, X_1, \dots, X_n$, $n+1$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, siguiendo una ley $\mathcal{N}(0, \sigma)$. La variable aleatoria $t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}}$ sigue una distribución *t de Student* (t_n) con n grados de libertad.

La función de densidad de una distribución t_n es:

$$f_{t_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-(\frac{n+1}{2})} \quad (3)$$

con $x \in \mathbb{R}$.

Se verifica que: $E[t_n] = 0$ y $Var[t_n] = \frac{n}{n-2}$.

Veamos a continuación el enunciado del teorema de Fisher que va a ser de utilidad para obtener los intervalos de confianza asociados a los parámetros de distribuciones normales.

TEOREMA 2.1

Sean X una variable aleatoria siguiendo una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Sean $X_1, \dots, X_n$, n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, siguiendo la misma ley de probabilidad que X . Se verifican los siguientes resultados:

$$(i) \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (4)$$

Este resultado puede también expresarse como:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (5)$$

$$(ii) \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2 \quad (6)$$

verificándose además que esta distribución es independiente de la X .

$$(iii) \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} / n - 1}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_{n-1}} \rightarrow t_{n-1}. \quad (7)$$

4 El teorema central del límite

Este teorema es uno de los más importantes dentro de la Estadística. En él podemos apreciar la gran relevancia de la distribución normal, ya que lo que en esencia viene a decir el teorema central del límite es que la ley probabilística que rige el comportamiento de la media aritmética extraída de cualquier distribución de partida, puede ser aproximada por una distribución normal.

Este resultado va a permitir obtener intervalos de confianza para la esperanza matemática de cualquier distribución de partida.

TEOREMA 2.2

Sean $X_1, \dots, X_n$, n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas gobernadas por una ley de probabilidad arbitraria, con esperanza matemática $E(X)$ y varianza $Var(X)$. Consideremos el estimador media muestral, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$. Se verifica que cuando $n \rightarrow \infty$ la ley de probabilidad que rige el comportamiento del estimador $\frac{\bar{X} - E(X)}{\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}}$ tiende hacia una distribución normal con esperanza matemática 0 y varianza 1.

El resultado que se establece en el teorema central del límite es en cierto modo sorprendente ya que se obtiene la ley de probabilidad asintótica del estimador media aritmética, sin que conozcamos la ley de probabilidad que gobierna a cada una de las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a partir de las cuales se ha obtenido la media aritmética.

Queda lejos de los objetivos de este tema la demostración del teorema central del límite, aunque es claro que el resultado queda establecido a nivel de convergencia. A nivel práctico si el tamaño de la muestra es superior o igual a 30, independientemente de la distribución de probabilidad de la que se ha extraído la muestra aleatoria simple, la distribución normal proporciona una buena aproximación a la distribución de probabilidad de la media aritmética². En principio la bondad de la aproximación está relacionada con la simetría de la distribución de probabilidad de la que se extraen las n variables independientes e idénticamente distribuidas, así como con el tamaño de la muestra.

²Nótese que un resultado equivalente al enunciado en el teorema puede ser enunciado diciendo que $\bar{X} \rightarrow \mathcal{N}(E(X), \sqrt{\frac{Var(X)}{n}})$.

5 Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución de Bernoulli

Siguiendo con el ejemplo introducido en el apartado 1.2 referente a 20 ejecuciones de un algoritmo heurístico de optimización de las cuales en 9 se obtuvo el óptimo global, supongamos que estamos interesados en determinar un intervalo de confianza a nivel 95% para el parámetro p relativo a la probabilidad de éxito.

Veamos un resultado, aplicación del teorema central del límite, con el que se puede determinar los intervalos de confianza para dicho parámetro.

TEOREMA 2.3

Sea una variable aleatoria X siguiendo un modelo de Bernoulli de parámetro p desconocido. Se extrae de dicha población X , una muestra aleatoria simple de tamaño n , $x_1, \dots, x_n$, a partir de la cual se construye el estimador:

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8)$$

es decir la frecuencia relativa de éxito. Si denotamos por $\hat{p} = \hat{p}(x_1, \dots, x_n)$ la estimación correspondiente a la muestra aleatoria simple anterior, se tiene que:

$$P(\hat{p} - \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) = 1 - \alpha. \quad (9)$$

siendo λ_α tal que $P(\mathcal{N}(0, 1) < \lambda_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Es decir el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para el parámetro p es de la forma:

$$(\hat{p} - \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}). \quad (10)$$

Los valores de λ_α se obtienen de las tablas de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, de tal manera que el área que dicha distribución deja a la izquierda del punto λ_α es $1 - \frac{\alpha}{2}$. Consultando dichas tablas obtenemos por ejemplo que para un nivel de confianza del 95% ($\alpha = 0.05$), el valor de $1 - \alpha$ es igual a 1.96, mientras que si aumentamos el nivel de confianza al 99% ($\alpha = 0.01$), el valor de $1 - \alpha$ resulta ser 2.57. Estos valores de $1 - \alpha$ están de acuerdo con la intuición comentada en el apartado 2.2 ya que si queremos depositar más confianza en un intervalo –conservando los valores de $\hat{p}$ y n – debemos de aumentar el tamaño del mismo.

Siguiendo con el ejemplo relativo a la determinación del intervalo de confianza para la probabilidad de alcanzar el óptimo global con el heurístico estocástico de optimización, a partir de 20 intentos de los cuales 9 fueron exitosos, tenemos que si el nivel de confianza es de 0.95 el intervalo de confianza será:

$$(\frac{9}{20} - 1.96 \sqrt{\frac{\frac{9}{20} \frac{11}{20}}{20}}; \frac{9}{20} + 1.96 \sqrt{\frac{\frac{9}{20} \frac{11}{20}}{20}}) \quad (11)$$

mientras que si aumentamos el nivel de confianza al 0.99, el intervalo de confianza se convierte en:

$$(\frac{9}{20} - 2.57 \sqrt{\frac{\frac{9}{20} \frac{11}{20}}{20}}; \frac{9}{20} + 2.57 \sqrt{\frac{\frac{9}{20} \frac{11}{20}}{20}}). \quad (12)$$

Veamos por otra parte que si hubiésemos obtenido la misma proporción de éxito pero ahora con una muestra aleatoria de mayor tamaño, las longitudes de los intervalos de confianza obtenidos para los mismos niveles de confianza anteriores van a disminuir.

Supongamos por ejemplo que en 200 ensayos se han obtenido 90 éxitos, es decir se ha alcanzado el óptimo global en 90 de las 200 ejecuciones. En tal caso, el intervalo de confianza a nivel 0.95 será:

$$\left(\frac{90}{200} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{90}{200}\frac{110}{200}}{200}}; \frac{90}{200} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{90}{200}\frac{110}{200}}{200}}\right). \quad (13)$$

Si aumentamos el nivel de confianza al 0.99 tenemos:

$$\left(\frac{90}{200} - 2.57\sqrt{\frac{\frac{90}{200}\frac{110}{200}}{200}}; \frac{90}{200} + 2.57\sqrt{\frac{\frac{90}{200}\frac{110}{200}}{200}}\right) \quad (14)$$

obteniéndose en ambos casos intervalos de confianza de longitudes menores que los logrados respectivamente para el caso de 20 ensayos y 9 éxitos.

6 Intervalo de confianza para la esperanza matemática de una distribución normal

Siguiendo con el ejemplo relativo al heurístico estocástico de búsqueda, consideremos ahora la variable aleatoria $X = \text{Tiempo}$, de la que teniendo en cuenta los datos de la tabla 1.1 hemos obtenido una muestra aleatoria simple de tamaño 20, con media aritmética, $\bar{X} = 30$ sg. Admitamos que el modelo probabilístico que rige el comportamiento de la variable aleatoria **Tiempo** sea normal. Estamos interesados en obtener un intervalo de confianza para la esperanza matemática de la variable **Tiempo**. En este tipo de intervalos de confianza distinguiremos dos casos en función de que la varianza de la variable normal sea conocida o no.

6.1 Varianza conocida

Veamos para el primer caso –varianza conocida– un teorema que nos va a permitir obtener una expresión para tales intervalos de confianza.

TEOREMA 2.4

Sea X una variable aleatoria con ley de distribución normal con varianza conocida σ^2 y esperanza matemática desconocida μ . Dada una muestra aleatoria simple, $x_1, \dots, x_n$, de tamaño n extraída de X , el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para el parámetro μ tiene la siguiente expresión:

$$\left(\bar{X} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (15)$$

donde λ_α verifica que $P(\mathcal{N}(0, 1) < \lambda_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos por el resultado (i) del teorema de Fisher que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (16)$$

Por lo tanto:

$$P[-\lambda_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_\alpha] = 1 - \alpha. \quad (17)$$

Por simple manipulación algebraica se tiene:

$$P[-\lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\mu < \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}] = 1 - \alpha. \quad (18)$$

El resultado anterior es equivalente a:

$$P[\bar{X} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha. \quad (19)$$

Con lo cual el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para μ será:

$$(\bar{X} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \quad (20)$$

EJEMPLO 2.2

Una aplicación directa de este resultado a la determinación del intervalo de confianza para μ , siendo $n = 20$, $\bar{X} = 30$ sg. y $\sigma = 10$ sg., nos lleva a que el intervalo de confianza al nivel 0.95 es:

$$(30 - 1.96 \frac{10}{\sqrt{20}}; 30 + 1.96 \frac{10}{\sqrt{20}}). \quad (21)$$

6.2 Varianza desconocida

En el caso en el que la varianza de la distribución de partida sea desconocida, deberemos de estimarla a partir de la muestra aleatoria simple. Parece intuitivo que la incertidumbre acerca de la estimación sobre la varianza va a tener un efecto de ampliar la longitud del intervalo de confianza que se construya para la esperanza matemática.

TEOREMA 2.5

Sea X una variable aleatoria con ley de distribución normal con varianza desconocida σ^2 y esperanza matemática también desconocida μ . Dada una muestra aleatoria simple, $x_1, \dots, x_n$, de tamaño n extraída de X , el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para el parámetro μ tiene la siguiente expresión:

$$(\bar{X} - t_{n-1;\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{n-1;\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}) \quad (22)$$

donde $t_{n-1;\alpha}$ es el valor que en una distribución t_{n-1} deja a su izquierda un área de $1 - \frac{\alpha}{2}$. Es decir:

$$P(t_{n-1} < t_{n-1;\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (23)$$

DEMOSTRACIÓN: Por el resultado (iii) del teorema de Fisher sabemos que:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_{n-1}} \rightarrow t_{n-1}. \quad (24)$$

Por lo tanto si $t_{n-1;\alpha}$ verifica que $P(t_{n-1} < t_{n-1;\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, tenemos que:

$$P[-t_{n-1;\alpha} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_{n-1}} < t_{n-1;\alpha}] = 1 - \alpha. \quad (25)$$

Operando en la parte izquierda de la igualdad anterior obtenemos:

$$P[\frac{-t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \frac{t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha. \quad (26)$$

O de manera equivalente:

$$P[-\bar{X} - \frac{t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + \frac{t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha. \quad (27)$$

Teniendo presente que tratamos de obtener un intervalo de confianza para μ , finalmente tenemos que:

$$P[\bar{X} - \frac{t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{t_{n-1;\alpha} S_{n-1}}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha \quad (28)$$

De ahí que el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para μ sea:

$$(\bar{X} - t_{n-1;\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{n-1;\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}). \quad (29)$$

EJEMPLO 2.3

La aplicación directa de la fórmula anterior al ejemplo de la obtención del intervalo de confianza a nivel 0.95 para el parámetro μ de la variable aleatoria **Tiempo** de la que se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 20, con $\bar{X} = 30$ con varianza desconocida y estimada por $S_{n-1}^2 = 100$, nos conduce a que dicho intervalo sea:

$$(30 - 2.09 \frac{10}{\sqrt{20}}; 30 + 2.09 \frac{10}{\sqrt{20}}). \quad (30)$$

Puede apreciarse que en este caso el intervalo de confianza obtenido engloba al conseguido para el caso en que la varianza era conocida. Conviene tener presente que en supuestos prácticos la alternativa en la que la varianza se supone desconocida es la que resulta ser de interés.

7 Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal

Siguiendo con el ejemplo introducido en el apartado 1.2, y en concreto con la variable **Tiempo**, habíamos recogido una muestra aleatoria simple de tamaño 20, con $\bar{X} = 30$ sg. y $S_{n-1} = 10$ sg. Supongamos que la distribución de partida se rige según un modelo normal, y que estemos interesados en obtener un intervalo de confianza para la varianza de dicha población.

Veamos a continuación un resultado que va a permitirnos obtener la expresión para los intervalos de confianza para la varianza de distribuciones normales.

TEOREMA 2.6

Sea X una variable aleatoria con ley de distribución normal con varianza desconocida σ^2 . Dada una muestra aleatoria simple, $x_1, \dots, x_n$, de tamaño n extraída de X , el intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para el parámetro σ^2 tiene la siguiente expresión:

$$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{b}; \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{a}). \quad (31)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y verifican $P(a < \chi_{n-1}^2 < b) = 1 - \alpha$.

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este resultado se basa en el punto (ii) del teorema de Fisher. Según dicho punto (ii), sabemos que: $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2$. Denotemos por a y b dos números reales positivos verificando que la probabilidad de que la distribución chi-cuadrado con $n - 1$ grados de libertad tome valores entre a y b sea de $1 - \alpha$. Es decir:

$$P(a < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} < b) = 1 - \alpha. \quad (32)$$

Operando obtenemos:

$$P(\frac{a}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{b}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}) = 1 - \alpha. \quad (33)$$

O de manera equivalente:

$$P(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{b} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{a}) = 1 - \alpha. \quad (34)$$

Por tanto el intervalo de confianza para la varianza, σ^2 , de una distribución normal es:

$$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{b}; \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{a}). \quad (35)$$

EJEMPLO 2.4

La aplicación directa de este resultado a los datos el apartado 1.1 nos lleva a que para obtener el

intervalo de confianza para σ^2 a un nivel del 0.90, los valores de a y b pueden ser: $a = 10.117$, $b = 30.144$ ya que: $P(10.117 < \chi_{19}^2 < 30.144) = 0.90$.

Por tanto el intervalo de confianza para σ^2 será:

$$\left(\frac{1900}{30.1444}; \frac{1900}{10.117}\right) \quad (36)$$

8 Intervalo de confianza para la esperanza matemática de una distribución cualquiera ($n \geq 30$)

El intervalo de confianza para la esperanza matemática de una variable aleatoria con ley de probabilidad cualquiera, de la que hemos extraído una muestra aleatoria simple lo suficientemente grande ($n \geq 30$) para que la distribución normal constituya una buena aproximación para la ley de probabilidad del estimador media aritmética, puede obtenerse de manera aproximada por la aplicación del teorema central del límite.

TEOREMA 2.7

Sea X una variable aleatoria siguiendo una ley de probabilidad cualquiera. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n ($n \geq 30$), $x_1, \dots, x_n$ extraída de X , el intervalo de confianza aproximado para la esperanza matemática, $E(X)$, de la variable X es de la forma:

$$\left(\bar{X} - \lambda_\alpha \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \lambda_\alpha \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \quad (37)$$

donde λ_α verifica que $P(\mathcal{N}(0, 1) < \lambda_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

EJEMPLO 2.5

Siguiendo con los datos de la variable **Tiempo**, donde ahora no se asume ningún modelo probabilístico sobre la misma, y supongamos que con un tamaño muestral 40 hemos obtenido $\bar{X} = 30$ y $S_{n-1} = 10$. El intervalo aproximado para la esperanza matemática de la variable aleatoria **Tiempo** a nivel 0.95 es:

$$\left(30 - 1.96 \frac{10}{\sqrt{40}}; 30 + 1.96 \frac{10}{\sqrt{40}}\right). \quad (38)$$

9 Notas bibliográficas

La distribución chi-cuadrada fué encontrada por primera vez por Helmer (1876) y Pearson (1900). La distribución t de Student fué descubierta por Gosset (1908) el cual escribió toda su obra bajo el seudónimo de Student. Una versión particular del teorema central del límite para distribuciones binomiales fué establecida por De Moivre (1733). El teorema central del límite, tal y como se ha presentado en este tema, fué enunciado por primera vez por Laplace (1812). Liapounoff (1901) dió una demostración rigurosa en condiciones bastante generales. Posteriormente Feller (1935), Khintchine (1935) y Lévy (1935) han resuelto el problema de encontrar las condiciones más generales de validez de dicho teorema. Los resultados englobados bajo el título del teorema de Fisher, fueron demostrados por Fisher (1925).

Un enfoque del tema dirigido a la Inteligencia Artificial y con una notación y terminología análogos a los usados en estos apuntes se puede encontrar en los libros de Cohen (1995) y Mitchell (1997).

10 Recursos en internet

- <http://euler.ciencs.ucv.ve/English/mathematics/demoivre.html>
Biografía de Abraham De Moivre

- <http://euler.ciencs.ucv.ve/English/mathematics/laplace.html>
Biografía de Pierre Simon de Laplace
- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Pearson.html>
Biografía de Karl Pearson
- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fisher.html>
Biografía de Sir Ronald Aylmer Fisher

Ejercicios

1. El tiempo X de ejecución de un programa está distribuido normalmente con esperanza desconocida μ y varianza conocida $\sigma^2 = 81$ sg². El programa se ejecuta 36 veces obteniéndose un tiempo medio de 100 sg. Asumiendo que las ejecuciones son independientes, obtener un intervalo de confianza para μ al 95 por ciento.
2. Supongamos que queremos estimar el tiempo medio de servicio de CPU que un ordenador proporciona a un determinado trabajo, con una probabilidad del 99 por ciento de que el valor estimado diste del verdadero valor en medio segundo.
Por experiencias pasadas se conoce que el tiempo de servicio de CPU sigue un modelo de distribución normal con $\sigma^2 = 2.25$ sg². Obtener el tamaño de muestra mínimo que garantiza la condición anterior.
3. Queremos estimar la esperanza matemática de la variable aleatoria tiempo de ejecución de un programa. Dicho programa se ejecuta 6 veces con datos escogidos al azar, obteniéndose que el tiempo medio de ejecución en esos 6 casos fué de $\bar{X} = 230$ sg., y con desviación standard muestral $S_n = 14$ sg.
Asumiendo normalidad de la variable aleatoria, obtener el intervalo de confianza al 98 por ciento para el tiempo de ejecución medio μ .
4. Calcular el valor de n para el cual el intervalo de confianza al 95 por ciento para la esperanza matemática de una distribución normal con varianza desconocida, estimada por $S_{n-1}^2 = S_0^2$ es 20 por ciento mayor que el intervalo de confianza para la esperanza matemática de una distribución normal con varianza conocida $\sigma^2 = S_0^2$.
5. Una queja habitual de los usuarios de los sistemas interactivos es la gran variabilidad del tiempo de respuesta. Antes de decidirse por la compra de un nuevo ordenador con sistema interactivo se miden 30 tiempos de respuesta de peticiones aleatorias, obteniéndose que la varianza muestral es de 25 sg².
Asumiendo normalidad en el tiempo de respuesta, obtener un intervalo de confianza al 95 por ciento para la varianza poblacional.
6. En un test efectuado sobre 10 componentes tratando de medir el tiempo en horas hasta que se produce un fallo, se obtuvieron los siguientes resultados:
1200, 1500, 1625, 1725, 1750, 1785, 1800, 1865, 1900, 1950.
Asumiendo que el tiempo de vida está normalmente distribuido, obtener un intervalo de confianza al 90 por ciento de nivel para la media poblacional.
7. Los tiempos de ejecución (en sg.) de 40 trabajos procesados por un ordenador han sido los siguientes:
10, 19, 90, 40, 15, 11, 32, 17, 4, 152
23, 13, 36, 101, 2, 14, 2, 23, 34, 15
27, 1, 57, 17, 3, 30, 50, 4, 62, 48
9, 11, 20, 13, 38, 54, 46, 12, 5, 26
(a) Obtener un intervalo de confianza al 90 por ciento de nivel para μ .
(b) Obtener un intervalo de confianza al 90 por ciento de nivel para σ .

Lista de trabajos optativos

1. Comprobación empírica del teorema central del límite

El objetivo de este trabajo es el de comprobar empíricamente el resultado teórico que está enunciado en el teorema central del límite. Para ello se efectuarán simulaciones con el software SPSS, variando tanto el tamaño de la simulación como la distribución y parámetros de partida, así como el número de variables, estudiándose en cada caso la cercanía de los datos obtenidos para la variable aleatoria media aritmética con respecto de una distribución normal.

2. Comprobación empírica del teorema de Fisher

En este trabajo se trata de llevar a cabo un estudio experimental relacionado con los resultados (ii) y (iii) del teorema de Fisher. Utilizando el software SPSS se simularán un número de variables aleatorias normales, a partir de las cuales se construirán las muestras relativas a la distribución t de Student y chi-cuadrado con los grados de libertad correspondientes. La comparación entre los valores muestrales obtenidos por la simulación y las distribuciones teóricas de probabilidad que especifica el teorema de Fisher se llevará a cabo por medio de la comparación entre la función de distribución muestral y la función de distribución teórica.

Referencias

1. P. R. Cohen (1995). *Empirical Methods for Artificial Intelligence*. Kluwer Academic Publishers.
2. A. De Moivre (1733). *Miscellanea. Analytica*.
3. W. Feller (1935). Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Zeitschr.*, 40, pp. 521.
4. R. A. Fisher (1925). Applications of Student's distribution. *Metron*, 5, no. 3, pp. 90.
5. F. R. Helmert (1876). Über die Wahrscheinlichkeit von Potenzsummen der Beobachtungsfehler, etcétera. *Z. f. Math. u. Phys.*, 21.
6. A. Khintchine (1935). Sul dominio di attrazione della legge di Gauss. *Giorn. Ist. Italiano d. Attuari*, 6, pp. 378.
7. P. S. Laplace (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Paris.
8. P. Lévy (1935). Propriétés asymptotique des sommes de variables aléatoires indépendents ou enchainées. *Journ. Math. Bures. Appl.*, 14, pp. 347.
9. A. Liapounoff (1901). Nouvelle forme du théoreme sur la limite de probabilité. *Mém. Acad. Sc. St-Pétersbourg*, 12, no. 5.
10. T. M. Mitchell (1997). *Machine Learning*. McGraw-Hill.
11. K. Pearson (1900). On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be a reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Phil. Mag.*, 50, pp. 157.
12. Student (1908). The probable error of a mean. *Biometrika*, 6, pp. 302.