Gaia I. Aldaketa Geometrikoak

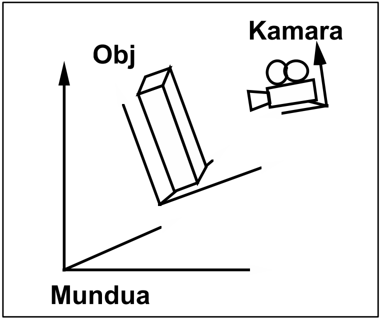
<a.soroa@si.ehu.es>

EHU

2007ko martxoak 7

Zertarako ?

- Objektuen propietate geometrikoak aldatzeko
  - Posizioa
  - Tamaina
  - Orientazioa
  - ...
- Erreferentzia sistema anitz izateko
  - Munduaren erreferentzia sistema
  - Kamararen erreferentzia sistema
  - Objektuaren erreferentzia sistema lokala
    - Objektu-taldeak



Aldaketa motak

Modeloen aldaketak

- Objektu konplexuak eraiki, sinpleez oinarrituta
- Objektuen erreferentzia sistema lokaletik munduko erreferentzia sistemara. Hierarkiak.

Bisten aldaketak

- Kamara mundu birtualan kokatzeko
- Munduko erreferentziatik kamararen erreferentziara pasa

Animazioak

- Aldaketak denboraren zehar aldatu, eta mugimendua sortu

Leku-aldaketa

- $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$ bektore baten mugimendua

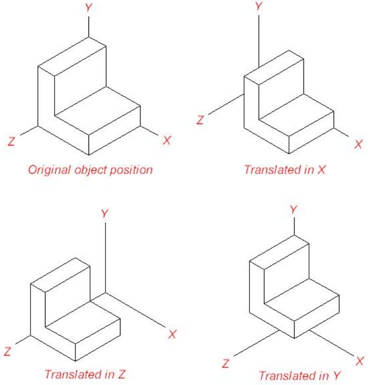
$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, 1)$ puntu bat izanik

$$\mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{p} = (p_x + t_x, p_y + t_y, p_z + t_z, 1)$$

- $\mathbf{p}$ bektorea bada, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, 0)$, $\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{p} = \mathbf{p}$
- $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{T}(-\mathbf{p})$

Leku-aldaketa



Entry Level Graphics Course Curriculum
Western Michigan University
Jason_a.cavanaugh at wmich.edu
http://grog.lab2.cc.wmich.edu/atkins/section52.htm

Tamaina-aldaketa

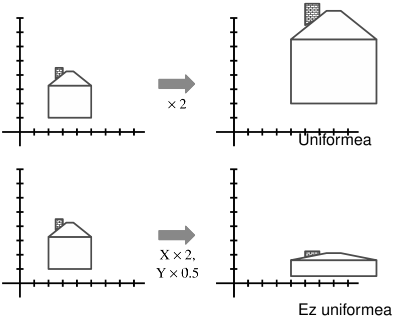
- Izan bitez s_x, s_y, s_z tamaina-aldaketarako faktoreak, x, y, z ardatzekiko, hurrenez hurren.

$$\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$
- $s_x = s_y = s_z$ bada, tamaina aldaketa *uniformea* dela esango da. Bestela, *ez uniformea*
- Aldaketa ez uniformeek konplexutasuna gehitzen diote zenbait eragiketeri
- Aldaketa uniformea bada

$$\mathbf{S}(s, s, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix}$$

Tamaina-aldaketa



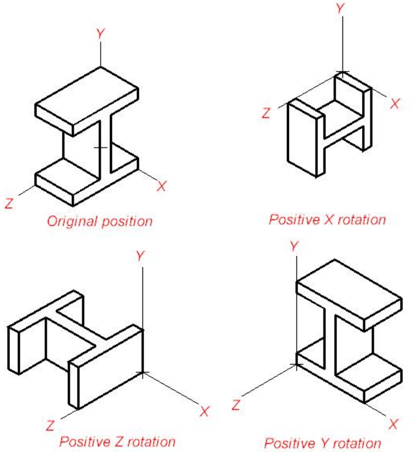
Biraketa

- x, y eta z ardatzekiko biraketak $\mathbf{R}_x(\phi), \mathbf{R}_y(\phi), \mathbf{R}_z(\phi)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_x(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_y(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_z(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Biraketa-matrizeak ortogonalak dira: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- Bestalde, $\mathbf{R}_i^{-1}(\phi) = \mathbf{R}_i(-\phi)$

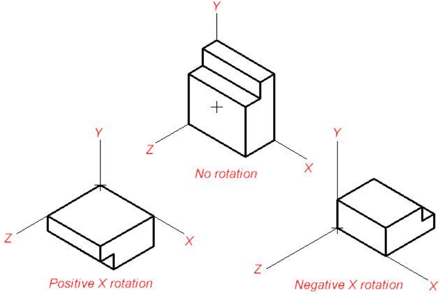
Biraketa



Entry Level Graphics Course Curriculum
Western Michigan University
Jason_a.cavanaugh at wmich.edu
http://grog.lab2.cc.wmich.edu/atkins/section52.htm

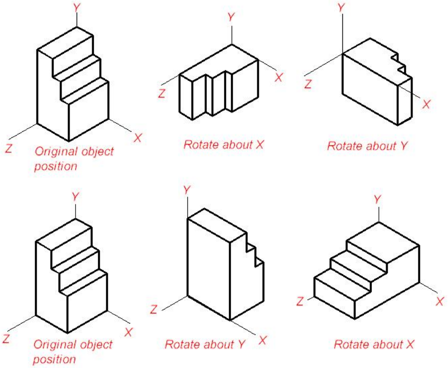
Biraketa

- Biraketaren norabidea: eskuin eskuko erregela



Aldaketen konposaketa

- Matrizeen konbinaketa
- Matrizeen konbinaketa ez da elkar-trukakorra: ordenak garrantzia du



Aldaketen konposaketa

- Demagun $ABCD$ aldaketen konposaketa:

$$\mathbf{P}' = ABCD\mathbf{P} = ABCD \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{P}' = (A(B(C(D\mathbf{P}))))$
- Kalkula dezakegu $M = ABCD$, eta orduan $\mathbf{P}' = M\mathbf{P}$

$$\begin{array}{rcl} M & \leftarrow & D \\ M & \leftarrow & CM \\ M & \leftarrow & BM \\ M & \leftarrow & AM \end{array}$$

Premultiply
Ezkerretik eskuinera

edo

$$\begin{array}{rcl} M & \leftarrow & A \\ M & \leftarrow & MB \\ M & \leftarrow & MC \\ M & \leftarrow & MD \end{array}$$

Postmultiply
Eskuinetik ezkerrera

Aldaketen konposaketa

- Matrizeak kalkulatu, eta emaitzak M matrize batean konposatzen joan
- Ondoko-biderkaketa (postmultiplication) da usuen erabilitako formalismoa:

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{pmatrix} = M\mathbf{P} = M \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- M kalkulatzeko
  - $M = I$ hasieratu
  - aldaketak alderantzizko ordenean kalkulatu

Aldaketen konposaketa. Inplementazioa

- Adibidez
    1. $\mathbf{P} = (x, y, 0)$ puntu bat jatorrira eraman: $\mathbf{T}(-x, -y, 0)$
    2. bertan ϕ gradu z ardatzan biratu: $\mathbf{R}_z(\phi)$
    3. puntua bere jatorrizko posiziora eraman: $\mathbf{T}(x, y, 0)$

  orduan $\mathbf{P}' = \mathbf{T}(x, y, 0) \cdot \mathbf{R}_z(\phi) \cdot \mathbf{T}(-x, -y, 0) \cdot \mathbf{P}$

```
glLoadIdentity()          /* Hasieratu M identitatea izan dadin*/
glTranslatef(x, y, 0)     /* 3) leku-aldaketa desegin */
glRotatef(phi,0,0,1)      /* 2) z ardatzarekiko biraketa */
glTranslatef(-x, -y, 0) /* 1) mugitu [x,y,0] jatorrira. */
```

Aldaketen konposaketa. Lerro-bektoreak

- Puntuak/bektoreak lerro-bektore bezala adieraz daitezke.
- $P = (p_x, p_y, p_z, 1)$ lerro-bektorea izanik
- Aldaketa-matrizeen irauliak lortu behar dira
- Aldaketen ordena alderantziz da
- $ABCD\mathbf{P}$ bihurtzen da $\mathbf{P}D^T C^T B^T A^T$
- OpenGL-k matrize irauliak erabiltzen ditu bere barnean

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & 0 \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

  - Honetaz jabetuko gara soilik parametro gisa matrizeak erabiltzen baditugu, adib. `glLoadMatrix`
  - Funtzio gehienek eskalarrak soilik eskatzen dituzte

Biraketen konposaketa

- Helburua: P puntu bat $\mathbf{v}$ bektore baten arabera ϕ angelu biratzea
- x, y, z ardatzekiko biraketak erabiliz:
  1. Biratu $-\alpha$ gradu y ardatzean, $\mathbf{v}$ bektorea YZ planoan egon arte: $\mathbf{R}_y(-\alpha)$
  2. Gero, biratu β gradu x ardatzean, $\mathbf{v}$ bektorea z ardatzarekin bat etorri arte: $\mathbf{R}_x(\beta)$
  3. Biratu ϕ angelu z ardatzean zehar: $\mathbf{R}_z(\phi)$
  4. Desegin x ardatzarekiko biraketa: $\mathbf{R}_x(-\beta)$
  5. Desegin y ardatzarekiko biraketa: $\mathbf{R}_y(\alpha)$
- Konposatuz:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi) &= \mathbf{R}_y(\alpha)\mathbf{R}_x(-\beta)\mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_x(\beta)\mathbf{R}_y(-\alpha) \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{R}(\phi)\mathbf{P} \end{aligned}$$

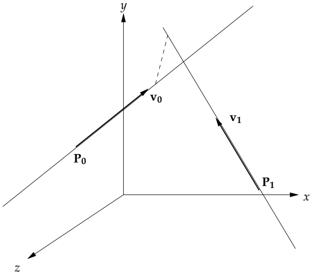
Biraketen konposaketa

- Lehen: biratu β gradu y ardatzean, $\mathbf{v}$ bektorea YZ planoan egon arte
  - Marraz ezazu !
- Nola kalkulatu β ?
  - Proiektatu $\mathbf{v}$ XZ planoan
  - Asmatu x ardatzarekiko duen angelua: τ
    - $\beta = -(\pi/2 - \tau) = \tau - \pi/2$
- Bigarren: biratu x ardatzean α gradu, $\mathbf{v}$ bektorea z ardatzarekin bat etorri arte
  - nola kalkulatu α ?

Aldaketen konposaketa

- Ariketa. Izan bitez $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{P_0}, \mathbf{v_0})$ eta $\mathbf{z_1} = (\mathbf{P_1}, \mathbf{v_1})$ bi zuzen.
  - $\mathbf{P_i}$ puntuak
  - $\mathbf{v_i}$ norabide-bektore unitarioak
- $\mathbf{z_1}$ zuzena $\mathbf{z_0}$-rekin lerrokatzeko M aldaketa.

$$\begin{aligned} M\mathbf{P}_1 &= \mathbf{P_0} \\ M(\mathbf{P_1} + u\mathbf{V_1}) &= \mathbf{P_0} + t\mathbf{V_0} \end{aligned}$$



Aldaketak eragiten

- Soilik leku-aldaketa, biraketa eta tamaina aldaketak jorratuko dira hemen
- Aldeketen konposaketak matrize bakar batean adieraz daitezke (matrize biderkaduren bidez)
- Izan bedi $\mathbf{M}$ aldaketen konposaketa

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{SR} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{non} \begin{cases} \mathbf{S} & \text{Tamaina-aldaketa} & \mathbf{S}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{R} & \text{Biraketa} & \mathbf{R}(\mathbf{n}, \alpha) \\ \mathbf{T} & \text{Leku-aldaketa} & \mathbf{T}(\mathbf{t}) \end{cases}$$

Aldaketak eragiten

- $\mathbf{P}$ puntua bada: $\mathbf{P}' = \mathbf{MP} = \begin{pmatrix} \mathbf{SR} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{SRP} + \mathbf{T}$
- Alderantzizkoa:
  $\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^T & -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^T(\mathbf{P}' - \mathbf{T})$
- $\mathbf{V}$ bektorea bada $\mathbf{V}' = \mathbf{MV} = \mathbf{SRV}$ (leku aldaketarik ez)

Aldaketak eragiten: konposaketa

- Demagun $\mathbf{P}$ puntu bati lehendabizi $\mathbf{M}_1$ eragin nahi diogula, eta gero $\mathbf{M}_2$

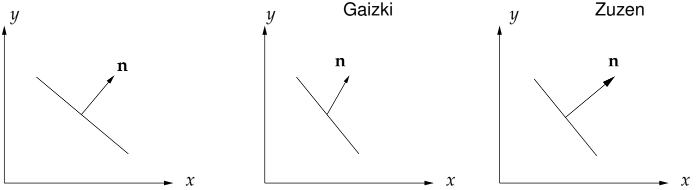
$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}' &= \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P} \\
\mathbf{P}' &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P} \\
\mathbf{P}' &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{S}_1\mathbf{R}_1\mathbf{P} + \mathbf{T}_1) \\
\mathbf{P}' &= \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2(\mathbf{S}_1\mathbf{R}_1\mathbf{P} + \mathbf{T}_1) + \mathbf{T}_2 \\
\mathbf{P}' &= \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{P} + \mathbf{S}_2\mathbf{R}_2\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2
\end{aligned}
$$

Aldaketak eragiten: normalak

- Normalak ez dira beste bektoreak bezala transformatzen
- Eragin nahi dugun aldaketa $\mathbf{M}$ bada, orduan $\mathbf{N}$ kalkulatu behar da, non

$$\mathbf{N} = (\mathbf{M}^{-1})^T$$

- Tamaina-aldaketarik ez badago ($\mathbf{S} = \mathbf{I}$), orduan $\mathbf{N} == \mathbf{M}$
- $\mathbf{M}$ matrizean tamaina-aldaketa *uniformerik* badago:
  1. Eragin $\mathbf{M}$
  2. Normalizatu bektore normalak
- $\mathbf{M}$ matrizeak tamaina-aldaketa ez-uniformerik badu: $\mathbf{N}$ kalkulatu behar !



Planoen aldaketak

- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = d$ planuari $\mathbf{M}$ aldaketa eragin nahi diogu, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{SR} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$
- Demagun tamaina-aldaketa uniformea dela, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(s)$ eta $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}(\frac{1}{s})$
- Normal berria: $\mathbf{n}' = (\mathbf{M}^{-1})^T\mathbf{n} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{n}$
- Aldatutako puntu bati normal berria biderkatuz, d' distantzia berria lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
d' &= \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{MX}) = (\mathbf{n}')^T(\mathbf{RSX} + \mathbf{T}) = (\mathbf{n}')^T\mathbf{RSX} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} \\
d' &= (\mathbf{n}^T\mathbf{R}^T\mathbf{S}^{-1})\mathbf{RSX} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} \\
d' &= \mathbf{n}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} \\
d' &= \mathbf{n}^T\mathbf{X} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} = d + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Plano berria $\begin{cases} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{X} = d' & \text{Tamaina aldaketarik ez badago(s=1)} \\ \frac{\mathbf{n}'}{\|\mathbf{n}'\|} \cdot \mathbf{X} = \frac{d + \mathbf{n}'\mathbf{T}}{\|\mathbf{n}'\|} & \text{bestela} \end{cases}$

Gorputz zurrunen aldaketa. (Rigid-body transformation)

- Ez ditu objektuen angeluak/tamaina erlatiboak aldatzen
- Leku-aldaketa eta biraketa matrizeak konbinatuz lortzen da:

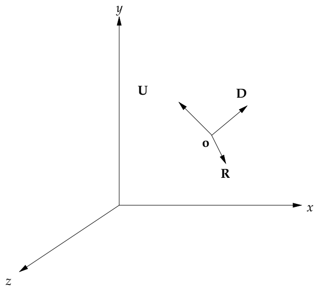
$$\mathbf{X} = \mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{R} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{X}^{-1} = (\mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{R})^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{t})^{-1} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}(-\mathbf{t})$
- Matrize-notazioak harturik:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erreferentzia-sistemaren aldaketa

- Demagun L erreferentzia-sistema bat definitzen dugula:
  - $\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z, 1)^T$ sistemaren jatorria
  - Hiru norabide-bektore, oinarri ortonormala osatzen dutenak:
    - $\mathbf{R} = (r_x, r_y, r_z, 0)^T$ “eskuinera” doan bektorea
    - $\mathbf{U} = (u_x, u_y, u_z, 0)^T$ “gora” doan bektorea
    - $\mathbf{D} = (d_x, d_y, d_z, 0)^T$ “atzera” doan bektorea
  - Nola pasa sistema batetik bestera?

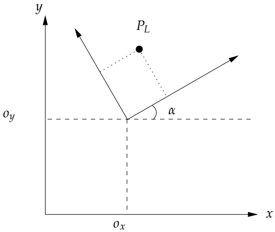


Erreferentzia-sistemaren aldaketa

- L erreferentzia-sisteman adierazitako edozein P_L punturen munduko koordenatuak jakiteko P_M:

$$P_M = \begin{pmatrix} r_x & u_x & d_x & o_x \\ r_y & u_y & d_y & o_y \\ r_z & u_z & d_z & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_L = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{U} & \mathbf{D} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_L$$

- **Ariketa.** Demagun ezkerreko 2D irudiko jatorria $\mathbf{o} = (4,4)$ dela eta angelua $\alpha = \pi/4$. Zein kordenatu izango ditu P_L munduan, bere koordenatu lokalak $(1,1)$ badira?



Erreferentzia-sistemaren aldaketa

- Askotan, alderantzizko aldaketa behar da.
- Puntu baten munduko koordenatuak izanik P_M, zein dira puntuaren koordenatu lokalak P_L?

$$P_M = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{U} & \mathbf{D} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_L$$

$$P_L = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{U} & \mathbf{D} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P_M$$

$$P_L = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z & -\mathbf{R} \cdot \mathbf{o} \\ u_x & u_y & u_z & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{o} \\ d_x & d_y & d_z & -\mathbf{D} \cdot \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_M$$

Erreferentzia-sistemaren aldaketa

- Honako irudi honetan, OpenGL-k erabiltzen dituen aldaketak ikus ditzakegu.