Oinarri Geometrikoak

<a.soroa@si.ehu.es>

EHU

2006ko otsailak 22

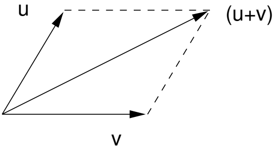
Bektoreak (eragileak)

- Bektorearen definizioa:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

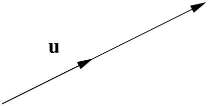
- Bi bektoreen batura:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_1 + v_1 \\ \dots \\ u_{n-1} + v_{n-1} \end{pmatrix}$$



- Biderketa eskalar batekin:

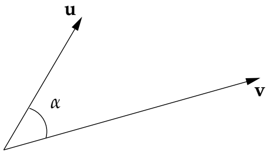
$$\alpha \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha v_0 \\ \alpha v_1 \\ \dots \\ \alpha v_{n-1} \end{pmatrix}$$



Bektoreak

- Biderketa eskalarra (*dot product*)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{u}^T\mathbf{v} = u_0v_0 + u_1v_1 + \ldots + u_{n-1}v_{n-1} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \parallel \mathbf{u} \parallel \parallel \mathbf{v} \parallel \cos\alpha \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &> 0 \Longleftrightarrow 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &< 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= \parallel \mathbf{u} \parallel^2
\end{aligned}
$$

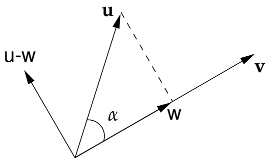


non α bi bektoreen arteko angelu *txikiena* den.

Bektoreak

- **w**:**u** bektorearen proiekzioa **v** bektorean

$$\begin{aligned} \| \mathbf{w} \| &= \| \mathbf{u} \| \cos\alpha \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|} \\ \mathbf{w} &= \| \mathbf{w} \| \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2} \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$



v normalizatua badago

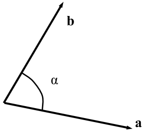
$$\begin{cases} \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\ \| \mathbf{w} \| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

Bektoreak

Bi bektoreen arteko angelua (orientatu gabe):

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \| \mathbf{a} \| \| \mathbf{b} \| \cos \alpha &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \alpha &= acos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\| \mathbf{a} \| \| \mathbf{b} \|} \right) \end{aligned}$$

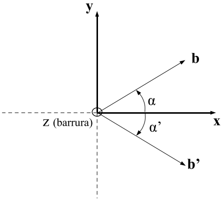


Erref. sistema batekiko angelua (orientatua):

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi$$

$$\alpha = acos \left(\frac{b_x}{\| \mathbf{b} \|} \right)$$

$$\text{if}(b_y < 0) \quad \alpha = -\alpha$$



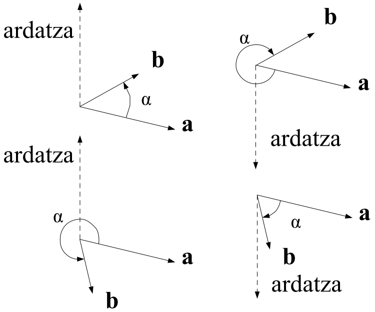
Bektoreak

- Biderkadura bektoriala
  - Bi bektoreen biderkadura bektoriala beste bektore bat da.
  - Izan bidez **u** eta **v** bektoreak, eta $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ haien biderkadura bektoriala. Orduan:
    - $\| \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \sin \alpha$
      non α bien arteko angelu *txikiena* den
    - $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ eta $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$
    - **u**, **v** eta **w** eskuin-eskuko sistema bat osatzen duten (dextrogiroa)
  - Ordena oso inportantea da!
  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ bsb $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$

Bektoreak

a eta **b** bektoreek osatutako angelua (α)

- Bi bektoreek osatzen duten planuarekiko elkarzuta den ardatz batek ezarriko du angeluaren orientazioa. Bi aukera:
  - Dextrogiroa (eskuin eskuko erregela)
  - Levogiroa (esker eskuineko erregela)



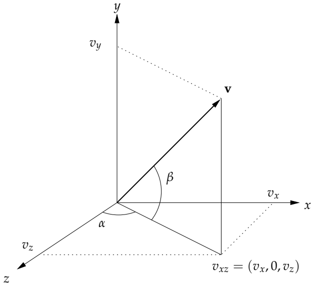
Biraketen konposaketa

- Koordenatu esferikoak. Izan bedi $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ jatorrian kokatutako bektore unitarioa

$$(v_x, v_y, v_z) = (\cos\beta \sin\alpha, \sin\beta, \cos\beta\cos\alpha)$$

- Algoritmoa:

$\text{if}(\mid v_y \mid > \sin(\pi/2 - \epsilon))\text{then}$
  $\alpha \leftarrow 0$
  $\beta \leftarrow \pi/2$
  $\text{if}(v_y < 0)\beta \leftarrow -\beta$
else
  $\| v_{xz} \| \leftarrow \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$
  $\alpha \leftarrow \arccos \frac{v_z}{\|v_{xz}\|}$
  $\text{if}(v_x < 0)\alpha \leftarrow 2\pi - \alpha$
  $\beta \leftarrow \arcsin v_y$



Zuzenak. Formulazio inplizitua (2D)

- Zuzen baten ekuazio inplizitua

$$Ax + By + C = 0$$

- Bektore paraleloak ($\mathbf{p_r}$)

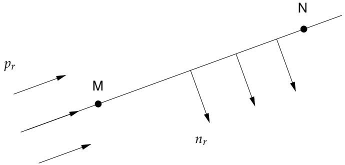
$$\alpha(-B, A), \forall \alpha \in \mathcal{R}, \alpha \neq 0$$

- Bektore perpendikularrak ($\mathbf{n_r}$)

$$\alpha(A, B), \forall \alpha \in \mathcal{R}, \alpha \neq 0$$

- **M** eta **N** puntuetatik igarotzen den zuzenaren koefizienteak:

$$A = N_x - M_y; B = M_x - N_x;$$
$$C = -\left((N_y - M_y)M_x + (M_x - N_x)M_y\right)$$



Zuzenak. Distantziak.

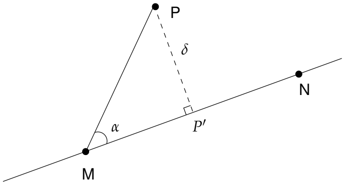
Izan bitez P puntua, eta M eta N puntuek definitutako zuzena P eta zuzenaren arteko distantzia zera da:

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{MP} \|^2 &= \| \mathbf{MP'} \|^2 + \delta^2 \qquad \text{(Pitagoras)} \\
\| \mathbf{MP} \|^2 &= \left(\frac{\mathbf{MP}\cdot\mathbf{MN}}{\|\mathbf{MN}\|}\right)^2 + \delta^2, \qquad \| \mathbf{MN} \| \neq 0 \\
\delta^2 &= \| \mathbf{MP} \|^2 - \frac{(\mathbf{MN}\cdot\mathbf{MP})^2}{\|\mathbf{MN}\|^2}, \qquad \| \mathbf{MN} \| \neq 0
\end{aligned}$$

δ^2 kalkulatzeko: 10(*), 13(+), 1(/)

Normalean δ ez da kalkulatzen, δ^2 baizik

Kontuz: **M** eta **N** desberdinak izan behar dute ! (bestela izendatzailea 0 da!)



Zuzenak. Distantziak.

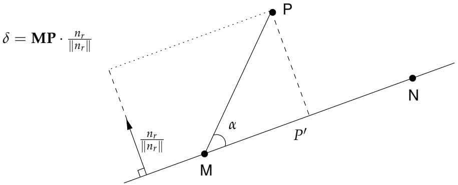
- Izan bitez P puntua, M eta N puntuak eta $\frac{\mathbf{n_r}}{\|\mathbf{n_r}\|}$ bektore normal unitarioa
- P eta zuzenaren arteko distantzia $\mathbf{MP}$ bektorearen proiekzioa da $\frac{\mathbf{n_r}}{\|\mathbf{n_r}\|}$ normalean:

$$\delta = \mathbf{MP} \cdot \frac{\mathbf{n_r}}{\| \mathbf{n_r} \|}$$

- Sinplifikatuz:

$$\delta^2 = \frac{((P_x - M_x)A + (P_y - M_y)B)^2}{A^2 + B^2}$$

- δ^2 kalkulatzeko: 7(*), 8(+), 1(/)



Zuzenak. Formulazio parametrikoa.

- Ekuazioa

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{o} + u\mathbf{d} \qquad a \le u \le b$$

  - $\mathbf{o}$ Zuzeneko puntu bat
  - $\mathbf{d}$ Norabide bektorea

- Edozein dimentsiotan !
- Zuzena *berparametriza* daiteke **d** bektorea unitarioa izan dadin.

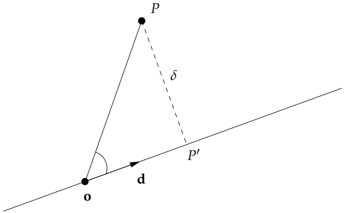
Formulazio parametrikoa. Distantzia

- Izan bedi $P'P$ puntu baten proiekzioa $\mathbf{p}(u) = \mathbf{o} + u\mathbf{d}$ zuzenean ($a \leq u \leq b$).

$$P' = \mathbf{o} + u_0\mathbf{d}$$
$$u_0 = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{o})}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

- Hortaz, distantzia $\delta = \| P' - P \|$ da.

$$\delta = \begin{cases} \| \mathbf{P} - \mathbf{o} \| & u_0 \leq a \\ \| \mathbf{P} - (\mathbf{o} + u_0\mathbf{d}) \| & a < u_0 < b \\ \| \mathbf{P} - (\mathbf{o} + b\mathbf{d}) \| & u_0 \geq b \end{cases}$$



- Normalean δ^2 kalkulatzen da: 10(*), 11(+), 1(/) baina edozein dimemtsiorako balio du

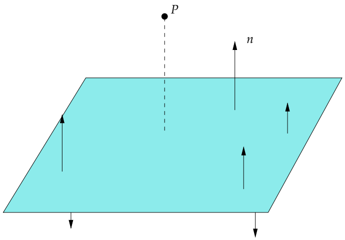
Planua (3D)

- Formulazio inplizitua

$$ax + by + cz = d$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = d$$

non $\mathbf{n} = (a, b, c)$ eta $\mathbf{X} = (x, y, z)$

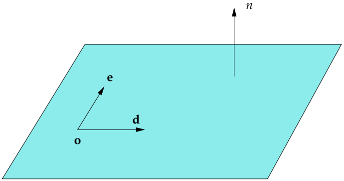
- planu baten infinitu adierazpen dago $\alpha(a, b, c, d) \quad \forall\alpha$
- $\alpha(a, b, c)$ planuak dituen normalen koordenatuak dira (infinituak). Bi normal soilik dira unitarioak.
- Planua solido baten aurpegiari lotuta badago, normal unitarioak kanpora begiratzen du.



Planua (3D)

- Formulazio parametrikoa. Izan bitez $\mathbf{o}$ puntua, eta $\mathbf{d}$ eta $\mathbf{e}$ bektoreak, norantza bera ez dutena ($\mathbf{d} \neq c\mathbf{e} \quad \forall c$).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u,v) &= \mathbf{o} + u\mathbf{d} + v\mathbf{e} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{e}}{\| \mathbf{d} \times \mathbf{e} \|} \end{aligned}$$



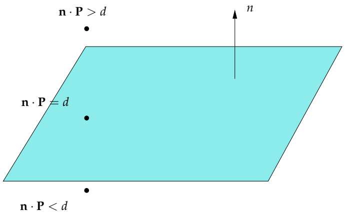
Planuak espazioa banatzen du

- Hiperplanuak espazioa bitan banatzen du.
- Jakin daiteke puntu bat planuaren zein aldetan dagoen.
- Izan bedi P puntua, eta $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = d$ planua.

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{n} \cdot P < d & P \text{ alde } \textit{negatiboan} \text{ dago} \\
\mathbf{n} \cdot P = d & P \ \textit{planukidea} \text{ da} \\
\mathbf{n} \cdot P > d & P \text{ alde } \textit{positiboan} \text{ dago}
\end{array}
$$

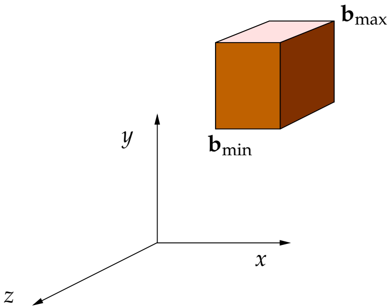
- P puntuaren distantzia planuarekiko

$$\mathrm{dist} = \mathbf{n} \cdot P - d$$



Bounding box

- Normalean, geometria konplexu baten ingurua adierazten du
- Frustum culling, kolisioak
- *Axis Aligned Bounding Box* (AABB)
  - Ardatzekiko lerrokatutako kaxa
  - Bi puntuk definitua: $(\mathbf{b}_{\text{min}}, \mathbf{b}_{\text{max}})$



AABB eta planoaren ebakidura

- AABB-k lau diagonal ditu
- Kalkulatu planuaren $\mathbf{n}$ normalarekin lerrokatuena dagoena. Nola?
  1. Diagonal bakoitzaren angelua normalarekiko
  2. Bide azkarragoak badaude (oharra, normaleko koordenatuen zeinuak)
- $\mathbf{v}_{\mathbf{max}}$ eta $\mathbf{v}_{\mathbf{min}}$: diagonalaren muturrak badira

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\mathbf{min}} \text{ kanpoan} & \text{AABB kanpoan} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{max}} \text{ barruan} & \text{AABB barruan} \\ \text{bestela} & \text{AABB barruan} \end{cases}$$