
8

Aproximación de Superficies con Puntos de Control



8.1 Introducción

El tema de aproximación de superficies por medio de funciones biparamétricas gobernadas por puntos de control es uno de los más importantes en Computación Gráfica y CAD, dado que es el método por excelencia para el modelado de objetos sólidos. En rigor, se efectúa un modelo de la superficie de los objetos. Esto es suficiente, sin embargo, para realizar un rendering adecuado, dado que, como vimos, los modelos de iluminación y sombreado necesitan exclusivamente información geométrica (y óptica) de la superficie de los objetos. Los modelos de volúmenes son exclusivamente necesarios cuando algún elemento interior del sólido produce efectos que deben ser visualmente apreciables. Una presentación muy breve de este tema se puede encontrar en el próximo Capítulo.

Uno de los hechos más notables del modelado de superficies es que se pueden aplicar los modelos de interpolación y aproximación de curvas de una manera casi directa. En vez de contar con una secuencia de puntos de control, se tiene un arreglo bidimensional o matriz. Los modelos de interpolación y aproximación que vimos en el Capítulo 4 (con excepción del de Lagrange) producen una base funcional parametrizada que indica la importancia de cada punto de control en el resultado final de la curva. Por lo tanto, es matemáticamente sencillo formular la existencia de dos familias de bases, cada una con su parámetro (por fila y por columna, por ejemplo). El producto cartesiano de dichas bases produce una base biparamétrica, la cual, en función del valor de ambos parámetros, determina la importancia de cada punto de control del arreglo bidimensional en la superficie final.

En la práctica usual de la Computación Gráfica, las posiciones de los puntos de control en una superficie no determinan restricciones de exactitud, sino más bien una tendencia geométrica. Por dicha razón, los métodos de interpolación, que son geoméricamente más inestables, han sido dejados de lado en el modelado de superficies, siendo los métodos de aproximación los más utilizados. En circunstancias especiales, donde se requiere definir que una superficie pase exactamente por un punto, se utilizan desarrollos inspirados en Splines pero con otro tipo de restricciones geométricas.

Como vamos a observar en la próxima Sección, las superficies de Bézier tampoco resultan satisfactorias para el modelado de objetos. Si la base de Bernstein promediaba excesivamente la geometría de los puntos de control en las curvas de Bézier, en el caso de superficies, este efecto se potencia aún más, por lo que el resultado es prácticamente inutilizable. Por dicha razón, el modelo más utilizado para generar superficies es el de B-Splines y sus variantes, especialmente los NURBS.

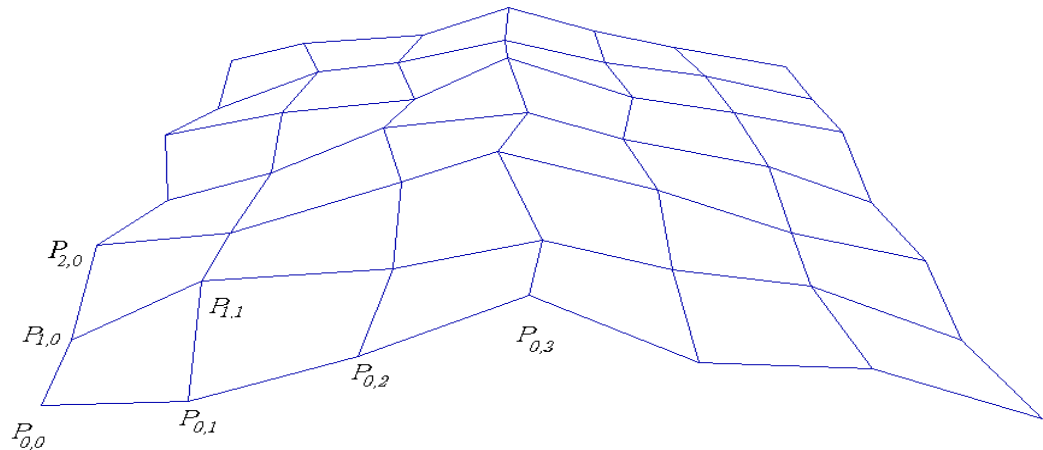


Figura 8.1 Arreglo bidimensional de puntos de control.

Por último, un tema de gran importancia tiene que ver con la configuración topológica de las superficies que se desea aproximar. Si nuestro punto de partida es un arreglo bidimensional de puntos de control (topológicamente equivalente a un plano), entonces la superficie aproximada debe poder desarrollarse a un plano. Esto excluye la posibilidad de modelar objetos con manijas, orificios, esquinas, etc. Por dicha circunstancia es que se desarrollaron modelos de aproximación de superficies con bases genuinamente biparamétricas, las cuales superan la limitación topológica de las bases bivariadas generadas por producto cartesiano.

8.2 Aproximación de Superficies I: Producto Tensorial de Curvas

Sea un arreglo rectangular de puntos de control $p_{ij} \in E^3$, con $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m$. Una superficie aproximante a dicho arreglo será una función biparamétrica, donde al variar los parámetros u y v se recorre la superficie según direcciones ortogonales (ver Figura 8.1).

8.2.1 Superficies de Bézier

A partir del arreglo de $(n + 1) \times (m + 1)$ puntos de control encontramos una única superficie \mathcal{S} , de orden n según u y de orden m según v , $0 \leq u \leq 1$, y $0 \leq v \leq 1$ (ver Figura 8.2).

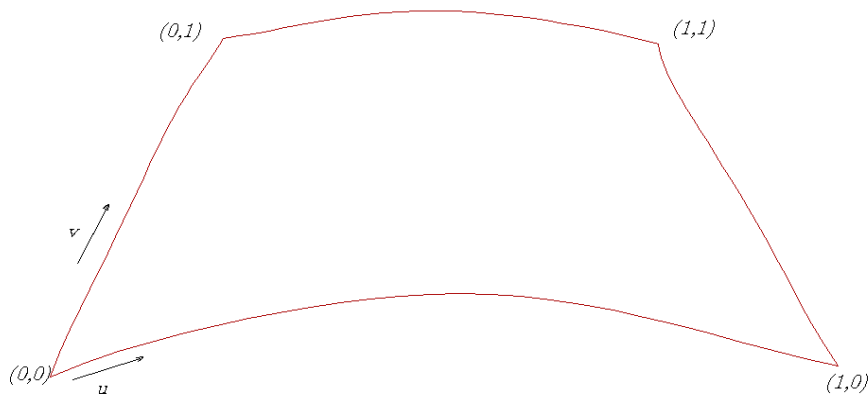


Figura 8.2 Dominio de una superficie de Bézier.

Recordemos que una curva de Bézier se encontraba como producto de una familia de funciones base por el arreglo de puntos de control:

$$\mathbf{C}(u) = [B_0^n(u), B_1^n(u), \dots, B_n^n(u)] \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

Si el arreglo de puntos de control es una matriz, entonces

$$\mathbf{C}(u) = [B_0^n(u), B_1^n(u), \dots, B_n^n(u)] \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} & \dots & p_{n0} \\ p_{01} & p_{11} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0m} & p_{1m} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(u) \\ p_1(u) \\ \dots \\ p_n(u) \end{bmatrix},$$

es una familia de curvas parametrizadas en u .

Tomando cada $p_i(u)$ como punto de control paramétrico de una nueva curva, encontramos una expresión biparamétrica como producto tensorial de las familias de

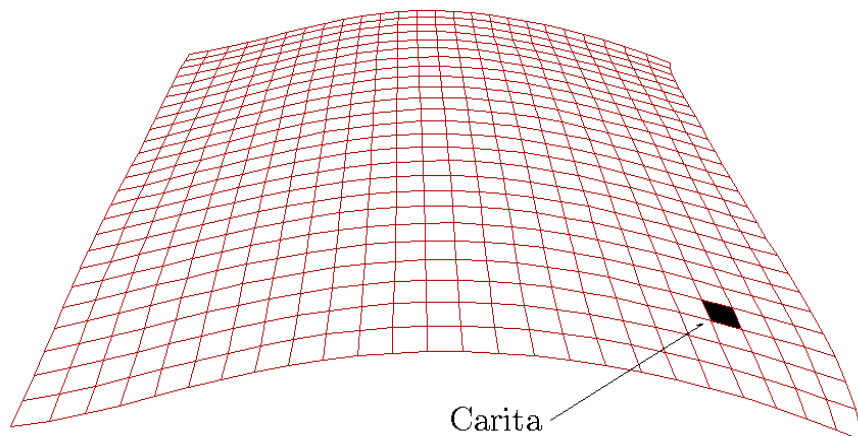


Figura 8.3 Evaluación de una superficie de Bézier por “caritas”.

funciones base:

$$\mathbf{S}(u, v) = [B_0^m(v), B_1^m(v), \dots, B_m^m(v)] \begin{bmatrix} p_0(u) \\ p_1(u) \\ \dots \\ p_n(u) \end{bmatrix},$$

Reemplazando una expresión en la otra obtenemos

$$\mathbf{S}(u, v) = [B_0^m(v), B_1^m(v), \dots, B_m^m(v)] [B_0^n(u), B_1^n(u), \dots, B_n^n(u)] \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} & \dots & p_{n0} \\ p_{01} & p_{11} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0m} & p_{1m} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix}.$$

De la definición de producto de matrices se observa que

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{ji} B_j^n(u) B_i^m(v).$$

Normalmente esta expresión se evalúa unas 5×5 veces, y con los valores resultantes se arman “caritas” (ver Figura 8.3).

La implementación de las superficies de Bézier puede observarse en la Figura 8.4. Como ya dijéramos más arriba, las curvas de Bézier son “perezosas” para adaptarse a

```

type grafo_contr = array [0..pts_ctrol] of
                    array [0..pts_ctrol] of punto;

procedure bezier(var g:grafo_contr);
var i,pi,j,pj:integer;
    u,bu,v,bv:double;
    p:punto;
    aux: array [0..pasos] of punto;
begin
  p.w:=1;
  for pj:=0 to pasos do begin
    v:=pj/pasos;
    for pi:=0 to pasos do begin
      u:=pi/pasos;
      p.x:=0; p.y:=0; p.z:=0;
      for j:=0 to pts_ctrol do begin
        bv:=bernstein(v,j,pts_ctrol);
        for i:=0 to pts_ctrol do begin
          bu:=bernstein(u,i,pts_ctrol)*bv;
          p.x:=p.x + g[i][j].x*bu;
          p.y:=p.y + g[i][j].y*bu;
          p.z:=p.z + g[i][j].z*bu;
        end;
      end;
      graf_punto(aux[pi]);
      graf_linea(p);
      aux[pi]:=p;
    end;
  graf_punto(aux[0]);
  for pi:=1 to pasos do graf_linea(aux[pi]);
end;
end;

```

Figura 8.4 Implementación de las superficies de Bézier.

cambios locales en el grafo de control. Esta misma característica se acentúa mucho más en el caso de superficies. Podemos ver en la Figura 8.5 de qué manera un gran cambio local produce escasamente una modificación en la superficie.

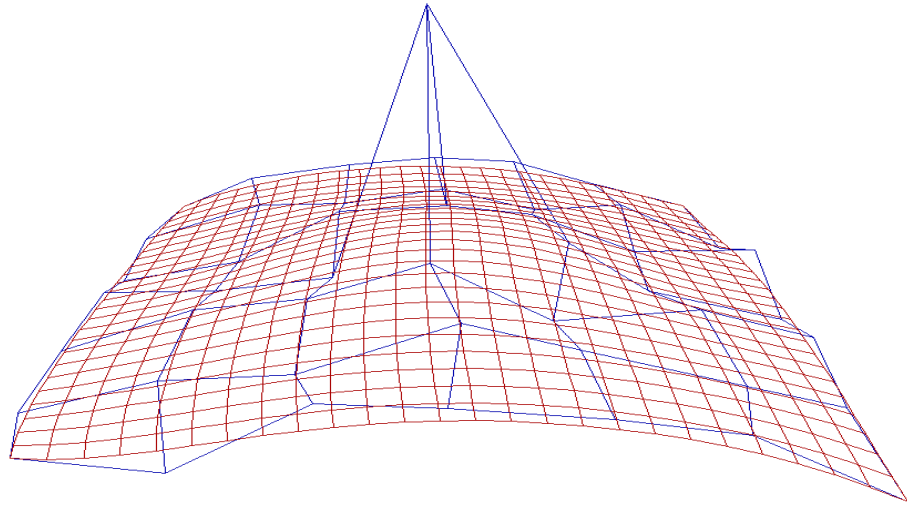


Figura 8.5 Superficie de Bézier con un gran cambio local.

Una forma de conseguir que la curva se adapte a la forma deseada es “exagerar” enormemente los cambios en el grafo de control. De esa manera, para lograr un “pico” en la curva es necesario desplazar el punto de control asociado a una distancia mucho mayor que la deseada (ver Figura 8.6). Sin embargo, es posible darse cuenta que esta manera de trabajar no es lo suficientemente versátil y adecuada. Además, para curvas de grado alto, o con dos o más “picos”, el resultado puede ser muy insatisfactorio.

Para solucionar este tipo de inconvenientes es posible utilizar superficies de Bézier racionales. Éstas, al igual que las curvas de Bézier racionales, se caracterizan por asignar un *peso* a cada punto de control (ver la bibliografía recomendada para el Capítulo 4). Es posible ver que los resultados son mucho más satisfactorios en el sentido de que la curva se adapta a la forma del grafo de control dándole peso adecuado a los puntos (ver Figura 8.7).

En este punto estaríamos en condiciones de poder elaborar nuestras primeras figuras graficadas con realismo. Por ejemplo, en la Figura 8.8 podemos ver la superficie de Bézier de la Figura 8.7 a la cual se le aplicaron técnicas de realismo vistas en el Capítulo anterior. Durante el procesamiento de la superficie, se agregaron instrucciones que invocan el scan line de la superficie antes de actualizar el vector de puntos auxiliares. De esa manera se construyen dos triángulos por carita: `triang(aux[pi],p,aux[pi+1])`

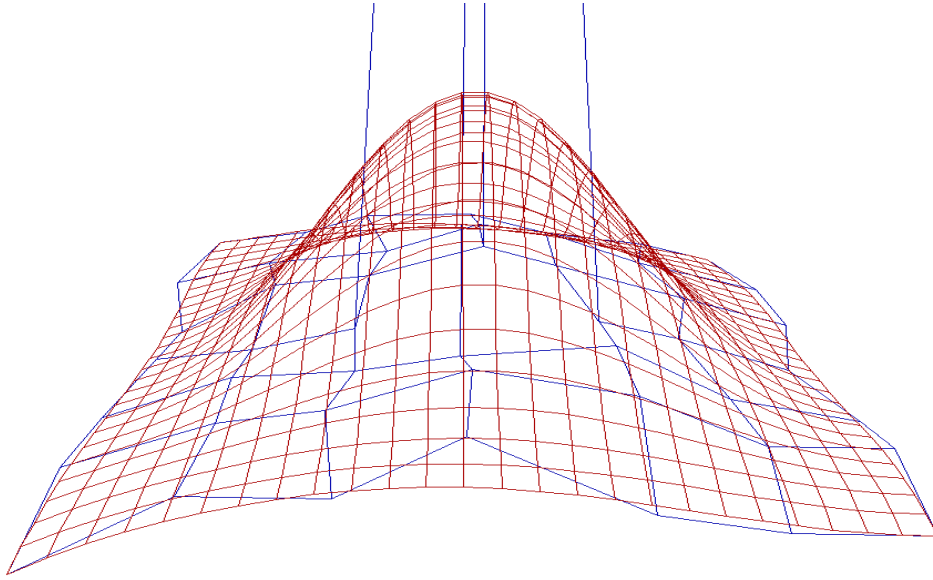


Figura 8.6 Superficie de Bézier exagerando el cambio local.

y `triang(aux[pi],p,aux[pi-1])`. El procedimiento `triang` se encarga de graficar triángulos sombreados según su normal. El normal del triángulo se computa con el producto vectorial entre diferencias de componentes de los puntos. Con dicho normal es posible decidir si la cara es en principio visible, y además se puede computar un modelo de iluminación y aplicar una técnica de sombreado como las ya vistas. Al mismo tiempo, dado que la superficie se puede recorrer arbitrariamente, se puede aplicar el algoritmo del pintor o el de Wright para la eliminación de caras ocultas.

8.2.2 Superficies B-Spline bicúbicas

Partimos de un arreglo rectangular de $(m + 1) \times (n + 1)$ puntos de control, y tomando un subarreglo de 4×4 se define la superficie \mathbf{S} como unión de $m - 2 \times n - 2$ segmentos. El segmento o “parche” \mathbf{S}_{kl} se define como producto tensorial de dos bases B-Spline cúbicas variadas en u y v :

$$\mathbf{S}_{kl}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 p_{j+k, i+l} N_j^3(u) N_i^3(v).$$

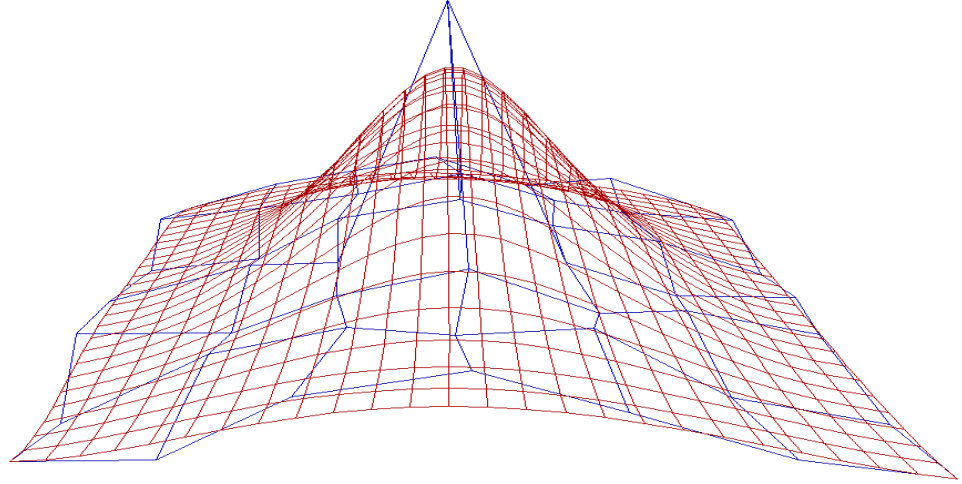


Figura 8.7 Superficie de Bézier racional con cambio local.

con $1 \leq k \leq m - 2$ y $1 \leq l \leq n - 2$. Recordando que la base es no nula solamente en cuatro intervalos, es posible simplificar la sumatoria a solamente 16 sumas ponderadas por las correspondientes sub-bases. De esa manera, la representación de un parche es

$$S_{kl}(u, v) = \sum_{i=-2}^1 \sum_{j=-2}^1 b_j(v_k) b_i(u_l) p_{k+j, l+i},$$

con $1 \leq k \leq m - 2$ y $1 \leq l \leq n - 2$, y u_l y v_k son los parámetros locales del parche. Por construcción, la superficie S es C^2 continua en las uniones entre parches.

Con respecto a las condiciones de terminación de una superficie B-Spline, debemos tener en cuenta que podemos adoptar cualquiera de los dos esquemas (repetir puntos o asignar periódicamente) en cada una de las dimensiones del arreglo de puntos. De esa manera, tenemos tres opciones posibles: terminación no periódica, terminación periódica en una dimensión, y terminación periódica en las dos dimensiones. Cada una de estas opciones determina una *topología* diferente para la superficie resultante. En el primer caso obtenemos una superficie abierta, como un mapa de altitudes. Partiendo

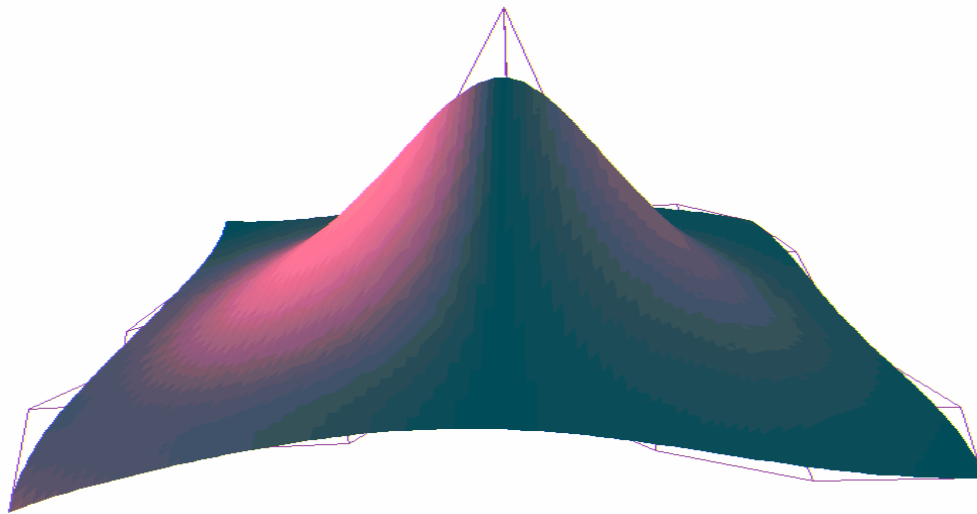


Figura 8.8 Superficie de Bézier aplicando cara oculta y un modelo de iluminación.

del siguiente arreglo de puntos:

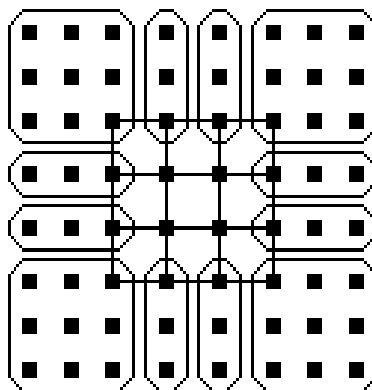
p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}
p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}
p_{02}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}

para obtener terminación con repetición de puntos de control debemos utilizar una matriz

p_{00}	p_{00}	p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{30}	p_{30}
p_{00}	p_{00}	p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{30}	p_{30}
p_{00}	p_{00}	p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{30}	p_{30}
p_{01}	p_{01}	p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{31}	p_{31}
p_{02}	p_{02}	p_{02}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{32}	p_{32}
p_{03}	p_{03}	p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{33}	p_{33}
p_{03}	p_{03}	p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{33}	p_{33}
p_{03}	p_{03}	p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{33}	p_{33}

8.2. Aproximación de Superficies I: Producto Tensorial de Curvas

Este arreglo, esencialmente, repite los puntos de control de acuerdo al siguiente esquema:



En el segundo caso, la superficie resultante es cilíndrica, lo cual es de gran utilidad para modelar sólidos de revolución o figuras como jarras, copas, etc. Para obtener esta terminación 1-periódica debemos utilizar una matriz

p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{00}	p_{10}	p_{20}
p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{00}	p_{10}	p_{20}
p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{00}	p_{10}	p_{20}
p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{01}	p_{11}	p_{21}
p_{02}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{02}	p_{12}	p_{22}
p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{03}	p_{13}	p_{23}
p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{03}	p_{13}	p_{23}
p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{03}	p_{13}	p_{23}

En el tercer caso, la superficie es toroidal, lo cual permite modelar objetos que tengan un agujero, como por ejemplo jarras con manija. Para obtener esta terminación

1-periódica debemos utilizar una matriz

p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{00}	p_{10}	p_{20}
p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{01}	p_{11}	p_{21}
p_{02}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{02}	p_{12}	p_{22}
p_{03}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	p_{03}	p_{13}	p_{23}
p_{00}	p_{10}	p_{20}	p_{30}	p_{00}	p_{10}	p_{20}
p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{01}	p_{11}	p_{21}
p_{02}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{02}	p_{12}	p_{22}

Podemos ver en la Figura 8.9 un ejemplo de figura con topología cilíndrica, modelado con 40 puntos de control, cuyo grafo se también se muestra.

8.3 Aproximación de Superficies II: Dominios Triangulares

Las superficies obtenidas por medio del producto tensorial de curvas son una solución adecuada para una clase bastante importante de problemas de aproximación. Sin embargo, la topología de los modelos resultantes está limitada a tres casos posibles. Por dicha razón se estudian también superficies que provengan de un modelo genuinamente bivariado, es decir, donde la primitiva de aproximación sea directamente la superficie.

Una de las formas de realizar dichas aproximaciones se basa en el uso de dominios triangulares. De esa manera, la formulación de curvas de Bézier basada en polinomios de Bernstein o del algoritmo de de Casteljau se generaliza a parches triangulares.

8.3.1 Algoritmo de de Casteljau bivariado

Los puntos de control deben asumir una configuración triangular. Para poder denotarlos, necesitamos utilizar una notación especial, basada en multiíndices. Un multiíndice $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$ es una tupla de $k + 1$ enteros no negativos. La norma $|\vec{i}|$ de un multiíndice es $|\vec{i}| = \sum_{j=1}^{k+1} i_j$. También llamamos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, etc.

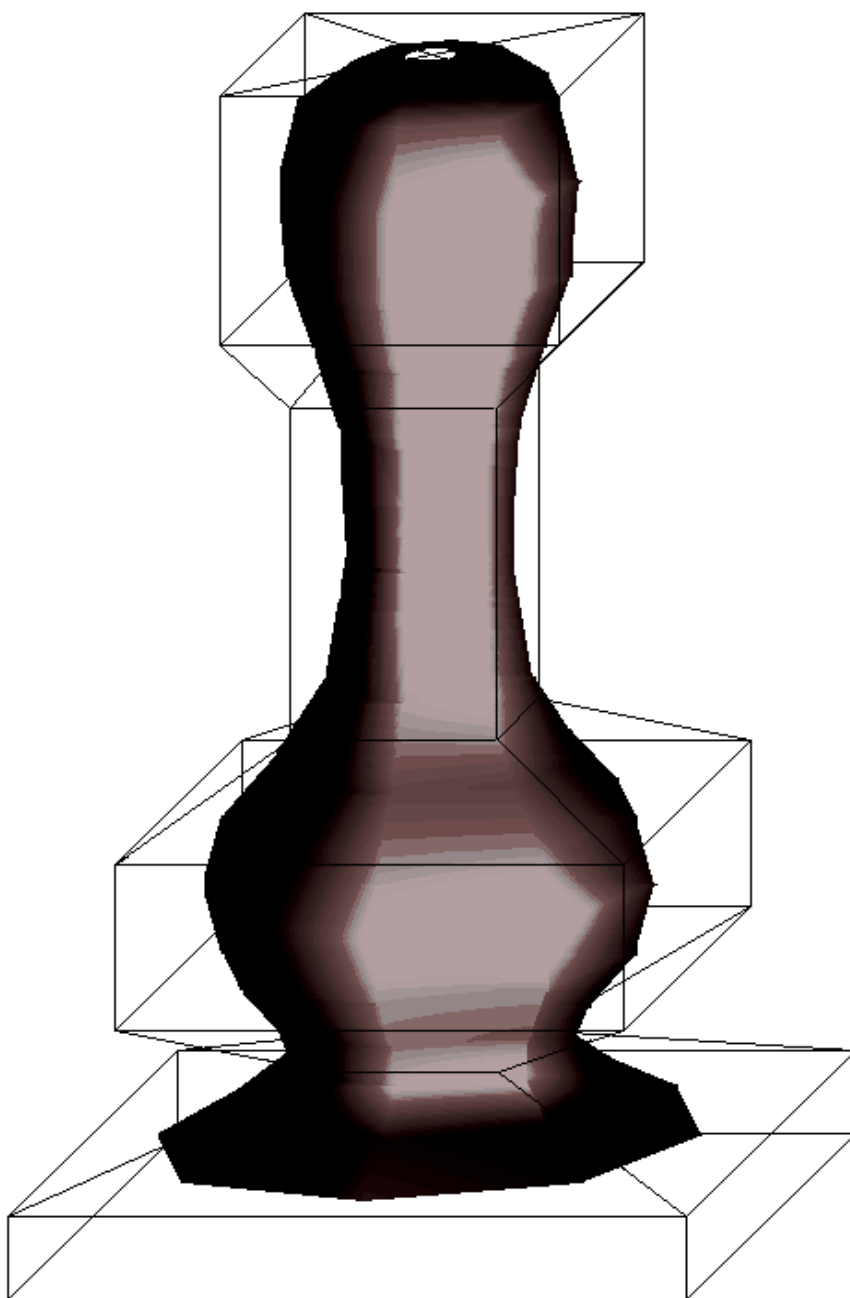


Figura 8.9 Superficie B-Spline bicúbica con su correspondiente grafo de control.

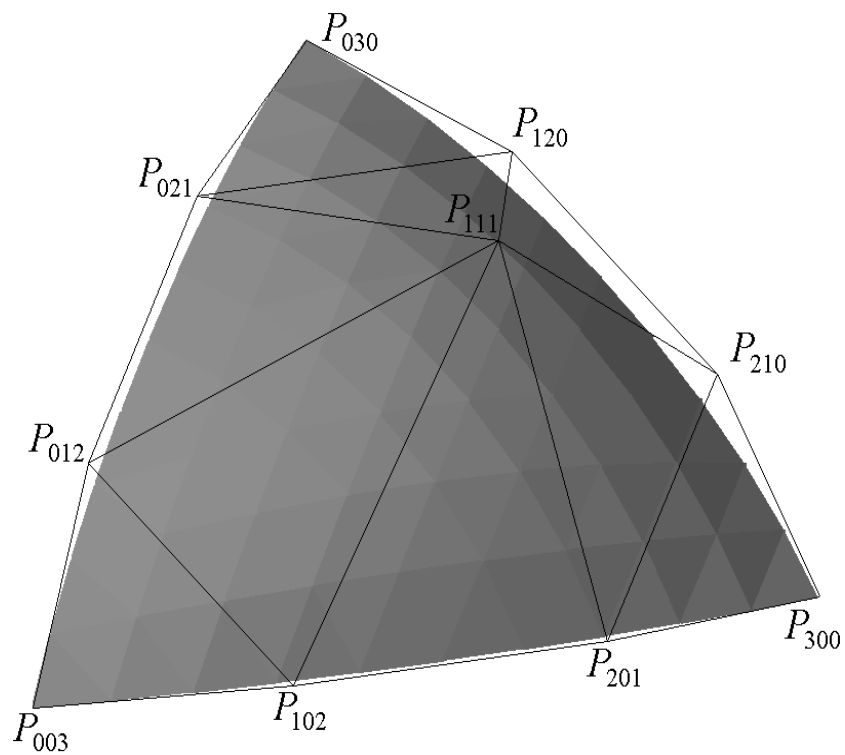


Figura 8.10 Arreglo bidimensional de puntos de control.

En forma explicita

$$S(u, v) = \sum_{i_0=0}^k \sum_{i_1=0}^{k-i_0} B_{(i_0, i_1, k-i_0-i_1)}^K(u, v, (1-u-v)) p_{(i_0, i_1, k-i_0-i_1)}.$$

En la Figura 8.10 podemos ver un arreglo triangular de puntos de orden 4 y la superficie triangular de Bézier resultante.

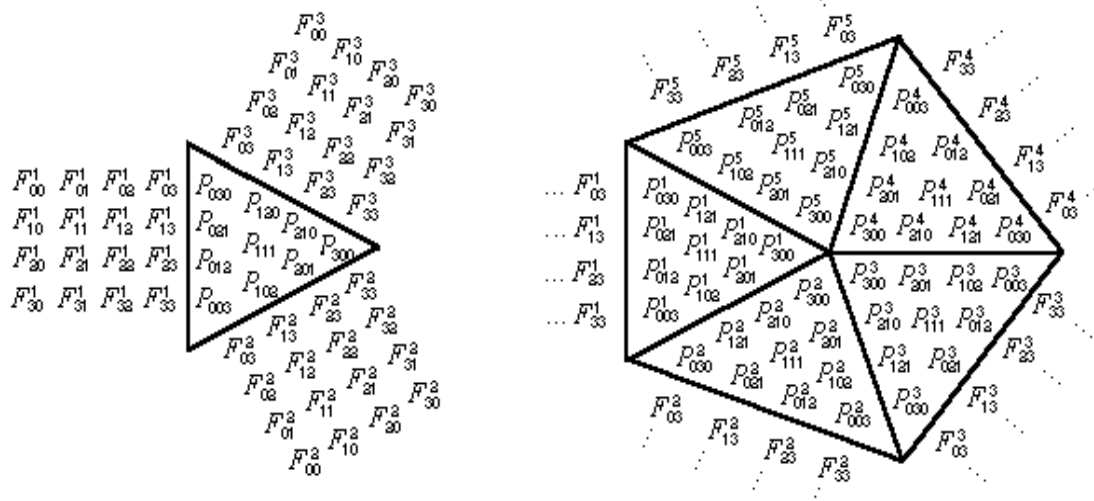


Figura 8.11 Parches de n lados como n parches triangulares.

Estas superficies se utilizan en general en conjunción con las superficies rectangulares vistas en la Sección anterior, mayormente para solucionar los problemas topológicos que pueden llegar a ocurrir. Las configuraciones anómalas para los parches que se necesitan para el modelado de esquinas, agujeros, manijas, etc., pueden lograrse con parches con n lados, los cuales, a su vez, pueden modelarse con el orden de continuidad adecuado por medio de n parches triangulares (ver Figura 8.11). De esa manera, la conjunción de parches triangulares junto con parches rectangulares (por producto tensorial) permite cubrir adecuadamente una clase mucho más amplia de problemas (ver Figura 8.12).

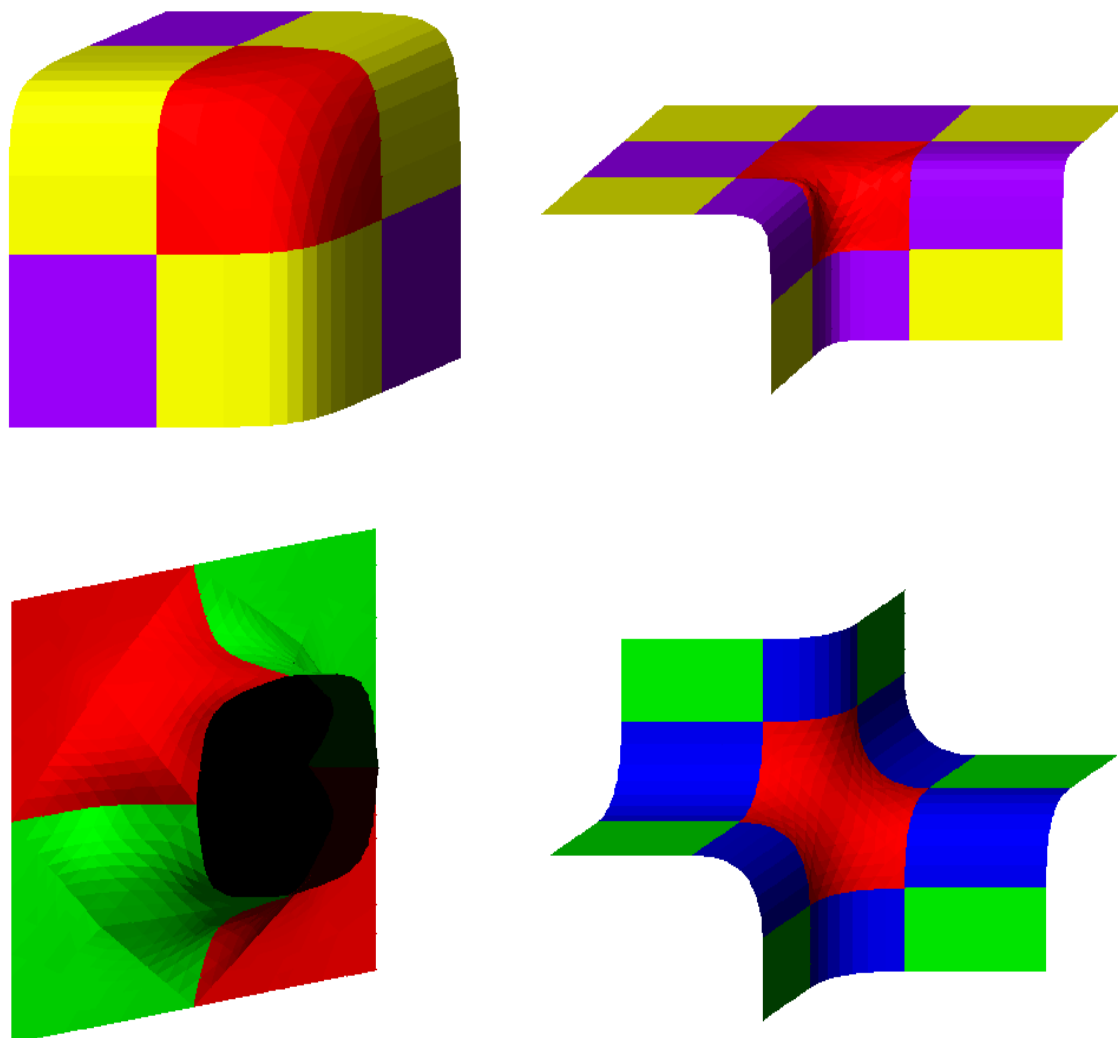


Figura 8.12 Solución a problemas topológicos con parches de n lados.

8.4 Ejercicios

1. Implementar los algoritmos de aproximación de superficies de Bézier y B-Spline cúbicos uniformes, como producto tensorial de curvas.
2. Aplicar los métodos a un grupo de grafos de control de prueba (por ejemplo, un tubo de teléfono, una cabeza, etc.).
3. Proponer soluciones para el armado de grafos de control de objetos no desarrollables, sin utilizar parches triangulares.
4. Implementar el método sencillo de construcción y sombreado de triángulos mostrado en el texto.
5. Implementar los parches de Bézier triangulares.

8.5 Bibliografía recomendada

Gran parte de las referencias recomendadas para el Capítulo 4 son adecuadas también para este Capítulo, en especial el libro de Farin [30] y el de Bartels et. al. [6]. Las discusiones relacionadas con la limitación topológica de la aproximación con superficies obtenidas con productos tensoriales, así como el desarrollo de los parches de Bézier triangulares, y B-Spline triangulares (no vistos aquí), puede consultarse en [58, 59, 45, 23].

