

# A

## Notación

---

$p, q$	Puntos en un espacio afín dado.
$x, y, z$	Coordenadas en un espacio vectorial.
$h$	Coordenada homogénea.
$x, y$	Coordenadas en el espacio de pantalla.
$s, t$	Parámetros escalares.
$T, T_1, T_2$	Transformaciones en un espacio afín dado.
$r, g, b$	Atributos de un color representado en RGB.
$C^k$	Orden de continuidad de una curva.
$C(u)$	Curva paramétrica representada con funciones polinomiales.
$\dot{C}(u)$	Derivada paramétrica de la curva, dado un valor del parámetro.
$\dot{p}$	Derivada de una curva interpolante al pasar por el punto (nudo) $p$ .
$S(u, v)$	Superficie paramétrica representada con funciones polinomiales.
$u$	Parámetro global (o único) de una curva paramétrica.
$u, v$	Parámetros de una superficie paramétrica.
$C_i(u)$	$i$ -ésimo segmento de una curva paramétrica.
$u_i$	Parámetro local del $i$ -ésimo segmento de una curva paramétrica.
$p_i$	Puntos de control para una curva o superficie.

$\overline{p, q}$	Segmento de recta que une los puntos $p$ y $q$ .
$p_i^k$	Puntos de interpolación intermedia.
$B_i^n$	Base de Bernstein para polinomios de grado $n$ .
$N_i^n$	Base de Splines para curvas de grado $n$ .
$b_{-2}(u)..b_1(u)$	Sub-bases de Splines cúbicos uniformes.
$I, I_a, I_p$	Intensidad luminosa (ambiente, puntual).
$k_a, k_p, k_d$	Coefficientes de reflexión ambiente, especular y difuso.
$N, L, R$	Vectores unitarios (Normal, incidencia Luminosa, Reflexión).

---

# B

## Elementos Matemáticos de la Computación Gráfica

---

### B.1 Álgebra de Matrices

Una matriz  $A$  es un arreglo de elementos escalares  $a_{ij}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si  $m = 1$  entonces estamos en el caso particular de un *vector fila*:

$$\mathbf{f} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

Si  $n = 1$  entonces es un vector columna:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

La traspuesta  $A^t$  de  $A$  es una matriz tal que

$$a_{ij}^t = a_{ji}$$

La suma de dos matrices  $A$  y  $B$  es una matriz  $C$  tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

El producto de un escalar  $s$  por una matriz  $A$  es una matriz  $B$  tal que

$$b_{ij} = sa_{ij}$$

El producto de dos matrices conformes  $A$   $[m \times k]$  y  $B$   $[k \times n]$  es una matriz  $C$   $[m \times n]$  tal que

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}$$

La submatriz  $A_{ij}$  de la matriz  $A$  es la matriz resultante de eliminar de  $A$  la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna.

El determinante  $|A|$  de una matriz  $A$  es un escalar definido recursivamente como

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Si  $|A| = 0$ , entonces  $A$  es una matriz *singular*.

La matriz adjunta de  $A$  es una matriz  $A^a$  tal que

$$a_{ij}^a = (-1)^{i+j} |a_{ij}|.$$

La inversa  $A^{-1}$  de  $A$  es una matriz tal que

$$a^{-1} = \frac{(a^a)^t}{|A|}.$$

Si  $A$  es singular entonces su inversa no está definida.

## B.2 Álgebra de vectores

Un espacio lineal (o vectorial) es un conjunto de valores (denominados vectores) cerrado bajo suma y multiplicación escalar. Debe existir un elemento 0 (identidad de la suma) denominado *origen*. La descripción usual de los elementos de un espacio vectorial es a partir de *coordenadas* respecto de una *base*.

**Ejemplo:** En  $\mathbf{R}^3$  la base usual es  $\mathbf{E}^3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , con

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El vector  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  se representa directamente como  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

dado que  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ .

El **módulo** o longitud de un vector es su norma-2:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_l^2}.$$

El **producto escalar** o interno de dos vectores es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_l w_l.$$

( $\mathbf{v}$  es de  $1 \times l$  y  $\mathbf{w}$  es de  $l \times 1$ . Entonces esta definición coincide con el producto de matrices).

Es también útil la identidad

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\theta),$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre ambos vectores.

El **producto vectorial** de dos vectores es

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} (v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ (v_3 w_1 - v_1 w_3) \\ (v_1 w_2 - v_2 w_1) \end{bmatrix}.$$

Es también útil la identidad

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin(\theta),$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre ambos vectores.

### B.3 Transformaciones Lineales y Afines

Dado un espacio vectorial  $\mathbf{R}^n$  y dos elementos (vectores)  $u$  y  $v$  de dicho espacio. Entonces una transformación  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  se denomina *lineal* si se cumple que para escalares  $\alpha, \beta$  arbitrarios

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Es importante observar que las traslaciones no son transformaciones lineales. En particular, es fácil ver que una transformación arbitraria queda definida por los coeficientes por los que transforma a la base del espacio vectorial. Por dicha razón, una transformación lineal puede representarse con una matriz de  $n \times n$ , y la transformación de un vector es el producto del mismo por dicha matriz.

Las transformaciones lineales son bien estudiadas en los cursos de matemática, no así las afines, las cuales son indispensables en Computación Gráfica. Dado un espacio vectorial  $\mathbf{R}^n$  y dos elementos (vectores)  $u$  y  $v$  de dicho espacio. Entonces una transformación  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  se denomina *afín* si se cumple que para un escalar  $\alpha$  arbitrario

$$T((1 - \alpha)u + \alpha v) = (1 - \alpha)T(u) + \alpha T(v)$$

. Es importante observar que las transformaciones lineales son afines pero no a la inversa. En particular, una transformación afín puede representarse como una transformación lineal compuesta con una traslación (ver [42]).

La representación de una transformación afín puede hacerse de dos maneras. La primera, menos usual, es utilizar un marco afín de referencia y definir un sistema de coordenadas baricéntrico dentro de dicho marco. Por ejemplo, dos puntos  $P, Q$  distintos definen un marco afín unidimensional (un subespacio), y cualquier punto  $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q$  pertenece a la recta que los une. En este caso el par  $(1 - \alpha), \alpha$  es la coordenada baricéntrica de  $R$  respecto del marco afín  $P, Q$ . El concepto de marco afín puede extenderse a cualquier espacio Euclídeo. Una transformación lineal en un marco afín representa, entonces, una transformación afín en un espacio lineal.

La segunda manera de representar transformaciones afines, la usual en Computación Gráfica, consiste en recorrer el camino inverso, es decir, encontrar un superespacio lineal

$S$ , del cual nuestro espacio usual  $E$  es un espacio afín. Entonces, las transformaciones lineales en  $S$  serán transformaciones afines en  $E$ .  $S$  debe ser, entonces, un espacio de una dimensión mayor que  $E$ , obtenido por *homogenización*. El proceso está detalladamente descrito en la Subsección 3.2.2 del texto.



## Bibliografía

- [1] T. Akimoto, K. Mase, y Y. Suenaga. Pixel-Selected Ray Tracing. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(4):14–22, 1991.
- [2] John Amanatides. Realism in Computer Graphics: A Survey. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 7(1):44–56, January 1987.
- [3] Brian Barsky. A Description and Evaluation of Various 3D Models. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(1):38–52, January 1984.
- [4] Brian Barsky y John Beatty. Local Control of Bias and Tension in Beta Splines. *ACM Computer Graphics*, 17(3):193–218, July 1983.
- [5] Brian Barsky y Tony DeRose. Geometric Continuity of Parametric Curves: Three Equivalent Characterizations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(6):60–68, November 1989.
- [6] R. Bartels, J. Beatty, y B. Barsky. *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [7] J. F. Blinn y M. E. Newell. Texture and Reflection in Computer Generated Images. *Communications of the ACM*, 19(10):542–547, October 1976.
- [8] James F. Blinn. Models of Light Reflection for Computer Synthesized Pictures. *ACM Computer Graphics*, 11(2):192–198, 1977.
- [9] James F. Blinn. Light Reflection Function for Simulation of Clouds and Dusty Surfaces. *ACM Computer Graphics*, 16(3):21–29, 1982.
- [10] James F. Blinn. Where am I? Where am I Looking at? *IEEE Computer Graphics and Applications*, 8(4):76–81, July 1988.
- [11] James F. Blinn. A Trip Down the Graphics Pipeline: Line Clipping. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(1):98–105, January 1991.
- [12] James F. Blinn. A Trip Down the Graphics Pipeline: Pixel Coordinates. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(4):81–85, July 1991.

- [13] James F. Blinn. A Trip Down the Graphics Pipeline: Grandpa, What Does “View-port” Mean? *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(1):83–87, January 1992.
- [14] James F. Blinn. A Trip Down the Graphics Pipeline: The Homogeneous Perspective Transform. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(3):75–80, May 1993.
- [15] James F. Blinn. Compositing I — Theory. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(5):83–87, 1994.
- [16] W. K. Bouknight y K. C. Kelley. An Algorithm for Producing Half-Tone Computer Graphics Presentations with Shadows and Movable Light Sources. En *Proceedings of the AFIPS*, vol. 36, 1970.
- [17] P. J. Bouma. *Physical Aspects of Colour*. Philips Research Lab., 1947.
- [18] Jack Bressenham. Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1), 1965. Reimpreso en [36], páginas 106–111.
- [19] I. Carlbom y J. Paciorek. Planar Geometric Projections and Viewing Transformations. *ACM Computing Reviews*, 10(4):465–502, 1978.
- [20] Michael F. Cohen, Donald P. Greenberg, David S. Immel, Philip J. Brock, S. Casey, y N. Reingold. An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(2):26–35, 1986.
- [21] Robert L. Cook y Kenneth E. Torrance. A Reflectance Model for Computer Graphics. *ACM Computer Graphics*, 15(3):307–316, 1981.
- [22] William Cowan. An Inexpensive scheme for Calibration of a Color Monitor in terms of CIE Standard Coordinates. *Computer Graphics*, 17(3):51–72, 1983.
- [23] T. de Rose y R. Goldman. Functional Composition Algorithms via Bloosoming. *ACM Transactions on Graphics*, 12(2):115–135, 1993.
- [24] T. A. Defanti, M. D. Brown, y B. H. McCormick. Visualization: Expanding Scientific and Engineering Research Opportunities. En G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, *Visualization in Scientific Computing*, páginas 32–47. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [25] C. Delrieux, S. Castro, A. Silvetti, y S. Anchuvidart. Paletas Estáticas para Gráficos de Alta Calidad en PC. En *XXII CLEI - Latin American Conference on Informatics*, Gramado, Brasil, 1995. SBC.
- [26] Claudio Delrieux. Curvas y Superficies para Computación Gráfica y CAD. Technical Report Escuela de Ciencias Informáticas, UBA-FCEN, Departamento de Computación, 1998.

- 
- [27] Claudio Delrieux, Daniel Formica, Fernando Caba, y Esteban Pedroncini. Una Solución Eficiente al Problema de la Cara Oculta. *Revista Telegráfica Electrónica*, 934, 1991.
  - [28] R. Drebin, L. Carpenter, y P. Hanrahan. Volume Rendering. *ACM Computer Graphics*, 22(4):65–74, 1988.
  - [29] Gouraud F. Continuous Shading of Curved Surfaces. *IEEE Transactions on Computers*, 20(6):623–629, 1971.
  - [30] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, New York, 1988.
  - [31] Hamid Farooosh y Gunther Schrack. CNS-HLS Mapping Using Fuzzy Sets. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(6):28–35, June 1986.
  - [32] J. Farrell. Colour Display and Interactive Interpretation of Three-Dimensional Data. *IBM Journal of Research and Development*, 27(4):356–366, 1983.
  - [33] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, y J. Hughes. *Computer Graphics. Principles and Practice*. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, second edition, 1990.
  - [34] T. Foley, D. Lane, G. Nielson, y R. Ramaraj. Visualizing Functions over a Sphere. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 10(1):32–40, 1990.
  - [35] A. Fournier, D. Fussell, y L. Carpenter. Computer Rendering of Stochastic Models. *Communications of the ACM*, 25(6):371–384, 1982.
  - [36] Herbert Freeman. *Tutorials and Selected Readings in Interactive Computer Graphics*. IEEE Press, 1980.
  - [37] H. Fuchs, M. Levoy, y J. K. Lam. Interactive Visualization of 3D Medical Data. En G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, *Visualization in Scientific Computing*, páginas 140–146. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
  - [38] S. Ganapathy y T. Dennehy. A New General Triangulation Method for Planar Contours. *ACM Computer Graphics*, 16(3):69–75, 1983.
  - [39] Michael Gervautz y Werner Purgathofer. A Simple Method for Color Quantization: Octree Quantization. En Andrew S. Glassner, editor, *Graphics Gems*. Academic Press, 1990.
  - [40] W. K. Giloi. *Interactive Computer Graphics - Data Structures, Algorithms, Languages*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
  - [41] Andrew Glassner. *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press, Cambridge, Massachussets, 1991.

- [42] Jonas Gomes, Lucia Darsa, Bruno Costa, y Luiz Velho. *Warping and Morphing of Graphical Objects*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 1999.
- [43] Cindy M. Goral, Kenneth E. Torrance, Donald P. Greenberg, y Bennett Battaille. Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces. *ACM Computer Graphics*, 18(3):213–222, 1984.
- [44] Ned Greene. Environment Mapping and Other Applications of Word Projections. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(11):21–29, 1986.
- [45] G. Greiner y H. Seidel. Modelling with Triangular B-Splines. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(2):56–60, 1994.
- [46] Roy Hall. *Illumination and Color in Computer Generated Imagery*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [47] Roy A. Hall y Donald P. Greenberg. A Testbed for Realistic Image Synthesis. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(8):10–20, 1983.
- [48] X. D. He y K. E. Torrance. A Comprehensive Physical Model for Light Reflection. *ACM Computer Graphics*, 25(4):175–186, 1991.
- [49] Paul Heckbert. Color Image Quantization for Frame Buffer Displays. *ACM Computer Graphics*, 16(3):119–127, 1982.
- [50] Paul Heckbert y Pat Hanrahan. Beam Tracing Polygonal Objects. *ACM Computer Graphics*, 18(3):119–127, 1984.
- [51] Paul S. Heckbert. Survey on Texture Mapping. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(11):56–67, 1986.
- [52] Max Herzberger. *Modern Geometrical Optics*. Interscience Publishing, 1958.
- [53] W. Hibbard y D. Santek. Visualizing Large Meteorological Data. En G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, *Visualization in Scientific Computing*, páginas 147–152. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [54] James T. Kajiya. The Rendering Equation. *ACM Computer Graphics*, 20(4):143–150, 1986.
- [55] James T. Kajiya y B. Von Herzen. Ray Tracing Volume Densities. *ACM Computer Graphics*, 18(4):91–102, 1984.
- [56] T. L. Kay y D. Greenberg. Transparency for Computer Sinthetized Images. *ACM Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '79)*, 13(3):158–164, 1979.
- [57] Donald Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 2. Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1973.

- 
- [58] C. T. Loop y T. de Rose. A Multisided Generalization of Bézier Patches. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3):204–234, 1989.
  - [59] C. T. Loop y T. de Rose. Generalized B-Spline Surfaces of Arbitrary Topologies. *ACM Computer Graphics*, 24(4):347–356, 1990.
  - [60] W. Lorensen y H. Cline. A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *ACM Computer Graphics*, 21(4):163–169, 1987.
  - [61] N. Magnenat-Thalmann y D. Thalmann. *Computer Animation: Theory and Practice*. Springer-Verlag, Tokyo, segunda edición, 1988.
  - [62] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1983.
  - [63] B. Mandelbrot y J. van Ness. Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.
  - [64] G. Murch. Physiological Principles for the Effective Use of Color. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(11):49–54, 1984.
  - [65] H. D. Murray. *Colour in Theory and Practice*. Chapman-Hall, New York, 1952.
  - [66] W. Newman y R. Sproull. *Principles of Interactive Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York, second edition, 1979.
  - [67] Gustavo A. Patow y Claudio A. Delrieux. On Low Cost Refraction Models. *Computer Networks and ISDN Systems*, forthcoming:Elsevier Science, 1997.
  - [68] H.-O. Peitgen y D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1986.
  - [69] Bui-Tong Phong. Illumination for Computer-Generated Pictures. *Communications of the ACM*, 18(6):311–317, 1975.
  - [70] Les Piegl. Interactive Data Interpolation by Rational Bézier Curves. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 7(4):45–58, 1987.
  - [71] Les Piegl. On NURBS: A Survey. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(1):55–71, 1991.
  - [72] P. K. Robertson. Visualizing Color Gamuts: a User Interface for the Effective Use of Perceptual Color Spaces in Data Displays. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 8(5):50–64, 1988.
  - [73] P. K. Robertson y J. O’Callaghan. The Generation of Color Sequences for Univariate and Bivariate Mapping. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(2), 1986.

- [74] L. Rosenblum. Scientific Visualization at Research Laboratories. *IEEE Computer*, 22(8):68–100, 1989.
- [75] Michael W. Schwarz, William B. Cowan, y John C. Beatty. An Experimental Comparison of RGB, YIQ, LAB, HSV and Opponent Color Models. *ACM Transactions on Graphics*, 6(2):123–158, 1987.
- [76] M. Stone. Color Printing for Computer Graphics. Technical Report EDL-88-5, XEROX Palo Alto Research Center, 1988.
- [77] M. Stone, W. Cowan, y J. Beatty. Color Gamut Mapping and the Printing of Digital Color Images. Technical Report EDL-88-1, XEROX Palo Alto Research Center, 1988.
- [78] I. E. Sutherland, R. F. Sproull, y R. A. Schumaker. A Characterization of Ten Hidden Surface Algorithms. *ACM Computer Surveys*, 6(1):387–441, 1974.
- [79] I. E. Sutherland y Hodgman G. W. Reentrant Polygon Clipping. *Communications of the ACM*, 17(1):34–42, 1974.
- [80] Ivan Sutherland. Sketchpad: A Man-Machine Grphical Communication System. En *Spring Joint Computer Conference Proceedings*. AFIPS, 1963. Reimpreso en [36], páginas 2–19.
- [81] Alain Trouvé. *La Mesure de la Couleur*. AFNOR-CETIM, Paris, 1991.
- [82] Aleksej G. Voloboj. The Method of Dynamic Palette Construction in Realistic Visualization Systems. *Computer Graphics Forum*, 12(5):289–296, 1993.
- [83] J. E. Warnock. *A hidden-surface algorithm for computer generated half-tone pictures*. PhD thesis, Univ. Utah Comput. Sci Dept., TR 4-15, 1969, NTIS AD-753 671, 1969.
- [84] Alan Watt y Mark Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley, London, 1992.
- [85] T. Whitted. An Improved Illumination Model for Shaded Displays. *Communications of the ACM*, 23(6):343–349, 1980.
- [86] Thomas Wright. A Two-Space Solution to the Hidden Line Problem for Plotting Functions of Two Variables. *IEEE Transactions on Computers*, 4(1), 1973. Reimpreso en [36], páginas 284–289.
- [87] C. Wylie, G. W. Romney, D. C. Evans, y A. C. Erdahl. Halftone Perspective Drawings by Computer. En *Fall Joint Computer Conference 1967*, páginas 44–58, Washington, DC, 1967. AFIPS.