Grafoak

Joseba Makazaga

1993-VI-1

Contents

Chapter 1

Sarrera

1.1 Grafoa

Grafoa: $G = (X, U)$ non:

X elementu kopuru mugatu bat duen multzoa den, elementu hauek erpinak dira. $|X| = n$, beraz X multzoan n elementu egongo dira.

U berriz XxX biderkaketa kartesiarraren azpimultzo bat izango da, eta bertako elementuei arku izena emango diegu, ondorioz, arku bat erpin bikote ordenatua izango da. $|U| = m$, beraz grafoak m arku izango ditu.

$X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$
$U = \{a_1, a_2 \dots a_m\}$ non $a_k = (x_i, x_j)$

- Baldin $a_k = (x_i, x_i)$ orduan bigizta dela esango dugu.
- Bi erpinen artean arku bakar bat onartzen duten grafoei 1-grafo deituko diegu, p arku onartuko bagenitu p-grafoekin ariko ginateke.
- Baldin

  1. erpin kopuru mugatua.
  2. arkua bikote ordenatua da

  orduan G grafoa grafo *ORIENTATUA* dela eango dugu.
- Grafoa *EZ ORIENTATUA* denean arkuak batzen dituen bi erpinen ordenak ez du garrantzirik, (x_i, x_j) edo (x_j, x_i) berdinak izango dira guretzat:

$\forall (x_i, x_j) \in U \Longrightarrow (x_j, x_i) \in U$

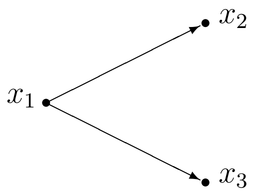
Kasu honetan U multzoko elementuei *ERTZ* izena emango diegu.

1.1.1 Grafoen irudikapena

Grafoa irudi bitartez adierazterakoan erpin bakoitza planuko punto bezala adieraziko dugu, arkua berriz, berau osatzen duten bi erpinei dagozkien puntuak batzen dituen segmentu orientatua bezala irudikatuko dugu.

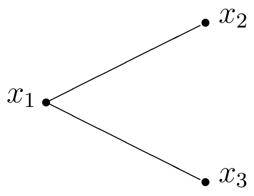
adibidez:

$G = (X, U)$ non $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ eta $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3)\}$



Grafoa ez orientatua edo ez zuzendua denean ertza irudikatzerakoan bi erpinen arteko segmentu ez orientatua jarriko dugu. adibidez:

$G = (X, U)$ non $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ eta $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1)\}$



1.1.2 Bergeren adierazpidea

$G = (X, \Gamma)$

Gure adierazpidean bezala X erpinen multzoa da, Baina Bergek arkoen multzoa adierazi beharrean korrespondentzia bat erabiltzen du grafoen definizioan:

$\Gamma : X \rightarrow X$ Hau korrespondentzia ez unibokoa da.

non $\Gamma(x_i) = \{x_j \in X/(x_i, x_j) \in U\}$ x_i bakoitzari bere segidakoen multzoa.

Era berean grafo bat honela adierazi daiteke:

$G = (X, \Gamma^{-1})$

Aurrekoan bezala X erpinen multzoa da, eta $\Gamma^{-1} : X \to X$ korrespondentzia ez unibokoa non:

$\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_j \in X/(x_j, x_i) \in U\}$ x_i bakoitzari bere aurrekariak.

1.1.3 Adierazpide zehatzagoa

$G = (X, U, \Gamma)$

Aurreko adierazpidetan bezala, hemen ere X erpinen multzoa da, $U = \{a_1, a_2 \ldots x_m\}$ arkuen multzoa eta $\Gamma : U \to XxX$ aplikazioak arku bakoitzari erpin bikote ordenatua egokitzen dio:

$\Gamma(a_i) = (x_j, x_k)$

1.2 Auzokidetza

- Bi arkuren arteko auzokidetza:

  a_k eta a_l arkuek erpin amankomun bat dutenean auzokideak direla esango dugu.

- Bi erpinen arteko auzokidetza:

  x_i eta x_j erpinen artean arku bat baldin badago bi erpin horiek auzokideak direla esango dugu.

1.3 Inzidentzia

- a arkua x_i erpinera inzidentea da baldin $\exists x_j / a = (x_j, x_i)$
- a arkua x_i erpinetik inzidentea da baldin $\exists x_j / a = (x_i, x_j)$
- a *ertza* x_i erpinarekin inzidentea da baldin $\exists x_j / a = (x_i, x_j)$

1.4 Erpin baten graduerdiak eta gradua

1.4.1 Graduerdiak

Erpinengan bi graduerdi definitzen ditugu:

- $d^+(x_i)$: x_i erpinetik inzidente den arku kopurua ($x_i$tik irteten den arku kopurua).
- $d^-(x_i)$: x_i erpinera inzidente den arku kopurua ($x_i$ra iristen den arku kopurua).

1.4.2 Gradua

Erpin baten gradua bere bi graduerdien batura bezala definituko dugu.
$d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$

- Bergeren adierazpidea kontutan hartuta:

  $d^+(x_i) = |\Gamma(x_i)|$

  $d^-(x_i) = |\Gamma^{-1}(x_i)|$
- Grafo ez zuzenduetan:

  $d^+(x_i) = d^{-(x_i)} = d(x_i)$
- Erpin isolatua 0 gradua duen erpina da.
- Zintzilik dagoen erpina 1 gradua duen erpina da.
- Grafo batetan gradu txikiena duen erpinak grafoaren gradu minimoa adierazten digu: $\min d(G)$
- Grafo batetan gradu handiena duen erpinak grafoaren gradu maximoa adierazten digu: $\max d(G)$.
- Grafo batetan erpin guztiek k gradua badaukate ($\max d(G) = \min d(G) = k$) grafo hori grafo K-erregularra dela esango dugu.
- 1-TEOREMA:

  Erpin guztien graduen batuketa arku kopuruaren bikoitza da.

$$\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2m$$

- 2-TEOREMA:

  gradu bakoitia duten erpin kopurua bikoitia da.

1.5 Ibilbideak

Ibilbideak μ hizkiz adieraziko ditugu, eta honako ibilbide motak bereiziko ditugu, grafo zuzenduak eta ez zuzenduak bereituz:

Grafo ez zuzenduetan:

- x_i eta x_j arteko *ertz sekuentzia*: $x_i$tik $x_j$ra joateko igaro behar den ertz auzokide multzo mugatua da, ez dute ezberdinak izan beharrik.

  Baldin $x_i \neq x_j$ orduan ertz sekuentzia irekia izango da.

  Baldin $x_i = x_j$ orduan ertz sekuentzia itxia izango da.

- *Katea*: Ertz ezberdinez osatutako sekuentziari katea deituko diogu. Itxia bada *zirkuito* izenez adieraziko dugu.

- *Kate edo zirkuito bakuna*:

  Kateak igarotzen dituen erpinak behin bakarrik igarotzen baditu orduan kate bakuna dela esango dugu. Zirkuitoaren kasuan lehenengo eta azkenengo erpina bera da, beste guztiak ezberdinak izango dira.

Grafo zuzenduetan:

- *Arku sekuentzia*: $x_i$tik $x_j$ra joateko igaro behar de arku auzokide multzo mugatua. Hau irekia edo itxia izan daiteke.

- *Bidea*: Arku ezberdinez osatutako arku sekuentzia, hau da, arku bakoitza behin bakarrik ager daiteke sekuentzian. Arku sekuentzia itxia denean *zikloa* izenez adieraziko dugu.

- *Bide edo ziklo bakuna*: Bideak igarotzen dituen erpinak behin bakarrik igarotzen baditu bakuna dela esango dugu.

Ibilbide guzti hauei *kardinalitate* bat lotuko diegu, eta honen balioa sekuentzia osatzen duten arku edo ertz kopurua izango da. P kardinalitatea duten ziklo eta zirkuitoei p-ziklo eta p-zirkuito deituko diegu.

Ibilbideak bi eratara adierazi daitezke:

1. Arkuen sesekuentzia adieraziz, hau da, arkuak etiketatuz.

2. Erpinen sekuentzia adieraziz.

1.6 Grafo motak

- Dejeneratua: Arkorik gabeko grafoa, baina erpinak badituena.

  $|X| \neq \emptyset$

  $|U| = \emptyset$

- Osotua: K_n: Erpin bakoitza beste guztien auzokide denean.

- Bialdeduna: Grafoaren erpinen artean $X = X_1 \bigcup X_2 / X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$ partizioa egin badezakegu eta arku edo ertz guztiek erpin bat alde batean eta bestea bestean badituzte, orduan grafo bialdeduna dela esango dugu.

  - Bialdedun osotua: K_{n_1,n_2} X_1eko epin guztiak X_2ko erpin guztien auzokide direnean.

    K_{n_1,n_2} non $|X_1| = n_1$ eta $|X_2| = n_2$

1.7 Manipulazioak grafoekin

- Erpin bat kendu, $G - x_i = (X^*, U^*)/X^* = X - \{x_i\}$ eta $U^* = U \bigcap (X^* x X^*)$

  Grafotik x_i erpina kendu eta bertara edo bertatik inziditzen duten arkuak kenduta lortzen dugun grafoa izango da $G - x_i$

- Arku bat kendu, $G - a = (X, U^*)/U^* = U - \{a\}$

  Grafotik arku hori kendu, baina beste guztia berdin mantendu.

- Arkua kontraitu, $G \backslash a$, non $a = (x_1, x_2)$. Honi kontrakzio elementala deituko diogu eta x_1 eta x_2 erpinak kenduz, eta bi hauen ordez bakar bat jarriaz lortzen da, baina berri honek aurreko bien auzokideen auzokide izan behar du.

  G_1 grafoa G_2 grafora kontraigarria dela esango dugu baldin eta G_1etik hasi eta kontrakzio elementalak eginaz G_2 lortu badezakegu.

- Erpin partizio batek induzitutako kondentsazioa.

$$\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots X_p\} / \forall r \neq s \left\{ \begin{array}{l} X_r \bigcap X_s = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^{p} X_i = X \end{array} \right.$$

Horrela $G_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, U_{\mathcal{X}})$ non

$U_{\mathcal{X}} = \{(X_r, X_s) \in \mathcal{X} x \mathcal{X} / X_r \neq X_s \wedge \exists x_i \in X_r, x_j \in X_s / (x_i, x_j) \in U\}$

1.8 Grafoen arteko erlazioak

- Grafo partziala: $G_p = (X, U_p)$ non $U_p \subset U$

  Erpin berdinak baina arku gutxiago dituen grafoa.

- Azpigrafoa: $G_b \subset G$, $G_b = (X_b, U_b)$ non $X_b \subset X \wedge U_b = U \bigcap (X_b x X_b)$

  Erpin gutxiago dituen grafoa baina gelditzen diren erpinen artean haserako grafoan zeuden arku guztiak mantentzen dituena.

  G_b grafoa G grafoaren azpigrafoa bada G grafoa G_b grafoaren supergrafoa dela esango dugu: $G \supset G_b$

- Grafo sinplifikatua: $G_s = (X, U_s)$ non:

  $U_s = \{(x_i, x_j) / (x_i, x_j) \in U \vee (x_j, x_I) \in U\}$

  Grafo sinplifikatua bigiztarik gabekoa eta arkuak dauden lekuan ertzak jarriaz lortzen dugun grafoa da, beraz grafo ez zuzendua izango da.

- Grafo osagarria: $\overline{G} = (X, \overline{U})$ non:

  $\overline{U} = \{(x_i, x_j) / (x_i, x_j) \notin U\}$

- Isomorfia: $G_1 \equiv G_2$ $G_1 = (X_1, U_1)$ eta $G_2 = (X_2, U_2)$

  X_1 eta X_2ko erpinen artean auzokidetza mantentzen duen korrespondentzi biunibokoa baldin badago orduan bi grafoak isomorfoak direla esango dugu.

  Beste era batetara esanda, G_1ko $x_i$ren auzokideei dagozkien G_2ko erpin guztiak $x_i$ri dagokion G_2ko erpinaren auzokide izan behar dute, eta hori erpin guztiekin bete behar da.

  Erlazio hau baliokidetasun erlazioa da: erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra da.

  Isomorfia erlazioa zehatz mehatz adierazi beharko bagenu goiko definizioak ez liguke balioko, ez bait da behar adinako zehatza p-grafoen kasurako. Zehaztasuna nahi izanez gero grafoen hirugarren adierazpidera jo behar dugu eta isomorfia honela definituko genuke:

Izan bitez $G = (X, U, \Gamma)$ eta $G^* = (X^*, U^*, \Gamma^*)$. G etaG^* isomorfoak badira orduan

$$\begin{array}{l} \exists \Psi : X \rightarrow X^* \\ \exists \Upsilon : U \rightarrow U^* \end{array} \Bigg/ \quad \forall a \in A \quad \Gamma(a) = (x_i, x_j) \Rightarrow \Gamma^*(\Upsilon(a)) = (\Psi(x_i), \Psi(x_j))$$

- Homeomorfia:

  G_1 eta G_2 homeomorfoak direla esateko biak G grafo batetatik hasi eta bere ertzetan 2 graduko erpinak tartekatuz lortzeko modukoak izan behar dute.

  2 graduko erpinak izan ezik G_1 eta G_2 isomorfoak dira.

- Grafo minimal/maximala (p propietatearekiko):

  G grafoa p propietatearekiko *minimala* dela esateko honako hauek bete behar dira:

  1. G grafoak p propietatea betetzen du
  2. $\forall G^* G^* \subset G$ orduan G^* grafoak ez du p betetzen

  G grafoa p propietatearekiko *maximala* dela esateko honako hauek bete behar dira:

  1. G grafoak p propietatea betetzen du
  2. $\forall G^*\ G \subset G^*$ orduan G^* grafoak ez du p betetzen

1.9 Pisudun grafoa

G grafoko (x_i, x_j) arku bakoitzak a_{ij} pisua (luzera,kapazitatea,balioa) elkartuta badarama, orduan G pisudun grafoa dela esango dugu.

G grafoko ibilbideei luzera bat elkartu diezaiekegu:

$$l(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in U} a_{ij}$$

1.10 Grafo bati loturiko matrizeak

1.10.1 Auzokidetza matrizea

$G = (X, U)$ grafoari dagokion auzokidetza matrizea $n\,x\,n$ dimentsioetako honako hau izango da:

$$A = [a_{ij}] \begin{cases} a_{ij} = 1 & (x_i, x_j) \in U \\ a_{ij} = 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

Matrize honen lerro eta zutabeek zenbait berezitasun dituzte:

- Lerroan dagoen 1 kopuruak $d^+(x_i)$ adierazten du:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d^+(x_i)$$

- Zutabean dagoen 1 kopuruak $d^-(x_i)$ adierazten du:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d^-(x_j)$$

- i lerroan 1 daukaten zutabeek adierazten duten erpin multzoa $\Gamma(x_i)$ da.
- i zutabean 1 daukaten lerroek adierazten duten erpin multzoa $\Gamma^{-1}(x_i)$ da.
- Grafoa ez zuzendua bada orduan $a_{ij} = a_{ji}$. Beraz matrizea simetrikoa izango da.

3. teorema

Auzokidetza matrizearen potentziak: $A^p = A\,x\,A\,x \dots x\,A$.

$A^p = [a^p_{ij}]$ Matrizea $n\,x\,n$ dimentsiotakoa da eta bertako a^p_{ij} bakoitzak x_i eta x_j erpinen artean p kardinalitatea duten arku segida ezberdin kopurua adierazten du.

Hau errez ikusten da A^2 matrizean:

$A^2 = A\,x\,A = [a^2_{ij}]$ non

$$a^2_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$b_k \neq 0 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{ik} \neq 0 \\ a_{kj} \neq 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_i, x_k) \in U \\ (x_k, x_j) \in U \end{array} \right. \leftrightarrow$$

$x_i$tik $x_j$ra garamatzan 2 kardinalitatea duen arku sekuentzia dago x_k erpinetik pasatzen dena.

Beraz $\sum_{k=1}^{n} b_k$ expresioak bi kardinalitatea duten arku sekuentzia kopurua adierazten du: $a_{ij}^2 = x_i$ eta x_j artean 2 kardinalitatea duten arku segida kopurua izango da.

1.10.2 Inzidentzi matrizea

Inzidentzi matrizea $n\,x\,m$ dimentsiodun matrizea izango da:

$$B = [b_{ij}] \left\{ \begin{array}{ll} b_{ij} = 1 & a_j \text{ arkuaren haserako erpina } x_i \text{ da.} \\ b_{ij} = -1 & a_j \text{ arkuaren bukaerako erpina } x_i \text{ da.} \\ b_{ij} = 0 & \text{beste kasuetan} \end{array} \right.$$

Matrize honetan zenbait gauza ikus daiteke:

- Zutabe bakoitzak 1 eta -1 ditu.
- 0 besterik ez duen lerroa erpin isolatuari dagokio.
- Lerro batek daukan 1 kopurua lerroa dagokion erpinaren $d^+(x_i)$ da.
- Lerro batek daukan -1 kopurua lerroa dagokion erpinaren $d^-(x_i)$ da.
- Lerroak edo zutabeak aldatu arren B matrizeak adierazten duen grafoa ez da aldatzen.

1.11 Ariketak

1. Grafoa bere osagarriaren isomorfoa denenan autoosagarria dela esaten da.
    - Lau erpin dituen grafo autoosagarria marraztu
    - Bost erpinekoa marraztu.
    - Seikorik ba al dago?
    - Grafo autoosagarrien erpin kopurua $4k$ rdo $4k+1$ dela frogatu
2. Frogatu grafoa bipartitua dela baldin eta soilik baldin bertako zirkuito guztiak kardinalitate bikoitia badute.
3. (93-ira-1.5) Zazpi erpineko 4-erregularra diren bi grafo besterik ez dagoela frogatu.
4. (93-ira-1)Izan bitez a eta b bi zenbaki oso eta positibo, $n = a + b$ eta a zenbaki bikoitia izanik. Frogatu beti existitu daitekela n erpindun grafoa zeinak a erpin gradu bakoitidun eta b erpin gradu bikoitidun dituen.
5. (94-otsa-1) Zazpi erpineko, bigiztarik gabeko eta isomorfo ez diren hiru grafo marraztu, baina hiruretan gradu bereko erpin kopuru bera jarri.
6. (94-otsa-1) Grafo bateko erpinen graduen batuketa grafoko ertz kopuruaren bikoitza dela frogatu.
7. (94-ek-2)Izan bedi $G = (X, U)$ grafo autoosagarria, non $n = 4k + 1$. Frogatu grafoan $(n-1)/2$ graduko erpin bat badagoela gutxienez. (Aholku bezala, gradu horretako erpin kopurua zenbaki bakoitia dela frogatuz saia zaitezkete).
8. (94-ira-1) Bigiztarik gabeko grafo autoduala marraztu baina k_4 ez dena.
9. (94-ira-2) Ondorengo bi frogapenak egin.
    - Frogatu grafoa bipartitua dela baldin eta soilik baldin bertako zirkuito guztiak kardinalitate bikoitia badute.
    - G grafoak $n^2/4$ erpin dituela kontutan hartuta, frogatu grafoan kardinalitate bakoitiko zirkuitoak daudela ala grafoa $k_{n/2,n/2}$ dela.

10. (95-ek-1.5) Ondorengo grafoan edozein erpin bikoteren arteko 5 luzeradun ertz sekuentzia kopurua lortu.

11. Hirukirik gabeko grafoak $[n^2/4]$ baino ertz gehiago ez duela frogatu.

12. G grafoko erpinen gradua k edo $k+1$ bada eta k gradukoak p badira, frogatu: $p = (k+1)n - 2m$

Chapter 2

Konektibitatea

2.1 Definizioak

- x_i erpinaren *segidakoak*: $\Gamma(x_i) = \{x_j \in X/(x_i, x_j) \in U\}$
- x_i erpinaren *aurrekoak*: $\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_j \in X/(x_j, x_i) \in U\}$
- x_i erpinaren *auzokideak*: $\Gamma(x_i) \bigcup \Gamma^{-1}(x_i)$
- $A \in X$ azpimultzoaren *segidakoak*: $\Gamma(A) = \bigcup_{x_i \in A} \Gamma(x_i)$. A azpimultzoko edozein erpinengandik arku bat iristen zaien erpin multzoa.
- $A \in X$ azpimultzoaren *aurrekoak*: $\Gamma^{-1}(A) = \bigcup_{x_i \in A} \Gamma^{-1}(x_i)$. A azpimultzoko edozein erpinetara garamatzan arku bat duten erpin multzoa.

2.2 Γ-ren potentziak

$$\Gamma^r(x_i) = \underbrace{\Gamma(\Gamma(\ldots\Gamma(x_i)\ldots))}_{r}$$

- baldin $x_j \in \Gamma^r(x_i)$ orduan $x_i$tik $x_j$ra garamatzan r kardinalitatea duen arku segidak existitzen du.
- Γren potentziak definitu ditugun bezala Γ^{-1}en potentziak defini ditzakegu.

2.2.1 Erpin baten ondorengoak: $\Gamma^*(x_i)$

x_i erpinaren ondorengoak erpin horretatik bideren bat dukaten erpin multzoari deituko diegu. Ondorioz, eta x_i tik bideren bat daukatenez, x_j $x_i$ren ondorengo bat bada orduan r bat egongo da zeinak betetzen duen: $x_j \in \Gamma^r(x_i)$.

2.2.2 Teorema

G grafoan $x_i$tik $x_j$ra bideren bat badago bere kardinalitatea $n-1$ edo txikiagoa da.

Teorema honek dioenaren arauera erpin baten ondorengoen multzoa $n-1$ multzoren bilketara mugatu dezakegu:

$$\Gamma^*(x_i) = \Gamma(x_i) \bigcup \Gamma^2(x_i) \bigcup \ldots \bigcup \Gamma^{n-1}(x_i)$$

2.2.3 Erpin baten arbasoak: $\Gamma^{-*}(x_i)$

- Ondorengoen definizioaren pareko definizioa.
- Antzeko teorema eta ondorioz:

$$\Gamma^{-*}(x_i) = \Gamma^{-1}(x_i) \bigcup \ldots \bigcup \Gamma^{-(n-1)}(x_i)$$

- Ondorengoen eta arbasoen arteko erlazio bat honako hau da:

$$x_j \in \Gamma^*(x_i) \Leftrightarrow x_i \in \Gamma^{-*}(x_j)$$

2.2.4 x_i erpinetik helgarriak: $R(x_i)$

Erpin batetatik helgarri diren erpinen multzoa Γ korrespondentziaren itxitura iragankorrari deituko diogu:

$$R(x_i) = \{x_i\} \bigcup \Gamma^*(x_i)$$

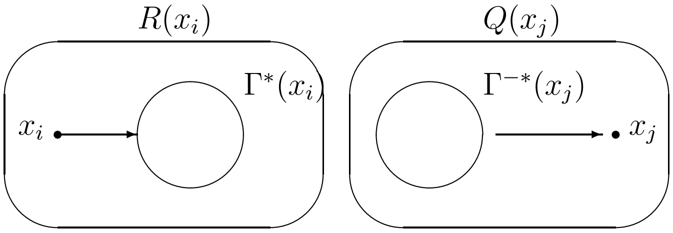
2.2.5 x_i erpinetik alderantziz helgarriak: $Q(x_i)$

Erpin batetatik alderantziz helgarri diren erpinen multzoa Γ^{-1} korrespondentziaren itxitura iragankorrari deituko diogu:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \bigcup \Gamma^{-*}(x_i)$$

Aurreko bi definizio hauek kontutan hartuta honako agerpen hauek egin behar dira:

- $R(x_i)$: x_i erpinetik hasita iritxi gaitezken erpin guztien multzoa da, hau da, $x_i$tik bide bat duten erpinen multzoa.
- $Q(x_i)$: $x_i$ra bide bat duten erpinen multzoa.
- $R(x_i)\bigcap Q(x_j)$: Ebaketa honetan dauden erpinek $x_i$tik $x_j$ra joaterakoan igaro daitezken erpinen multzoa osatzen dute.



$R(x_i)\bigcap Q(x_j)$ multzoko elementuak $\mu(x_i \rightarrow x_j)$ bideentzat beharrezko erpinak direla esango dugu.

2.3 Konektibitate estua: f

x_i eta x_j erpinak estuki konektatuta daude $\Leftrightarrow$ x_i erpina x_j erpinetik helgarria bada eta x_j erpina x_i erpinetik helgarria bada.

$$x_i f x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i \in R(x_j) \\ x_j \in R(x_i) \end{cases}$$

- $x_i f x_j \Leftrightarrow x_i$ eta x_j erpinak dauzkan ziklo bat existitzen du.
- f baliokidetasun erlazioa da, eta ondorioz X/f erpin partizio bat da.

2.3.1 Grafo murriztua: G^R

X/f partizioak induzitutako grafo kondentsatuari grafo murriztua deituko diogu. Grafo honen erpin bakoitza X/f partizioko klase bati dagokio, eta erpin hauetako loturak edo arkoak G grafoko arkoen arauera izango dira, hau da, i klaseko erpin batetatik j klaseko erpin batetara garamatzan arkurik balego i klaseari dagokion erpinetik j klaseari dagokion erpinera arko bat egongo da grafo murriztuan.

f erlazioak eragiten duen partizioaren arauera honako bi kontzeptu hauk bereiztuko ditugu:

- Baliokidetza klase batetan dauden erpinek osatzen duten azpigrafoari G grafoko *estuki konektatutako osagaia* deituko diogu.
- Grafoko erpinen artean baliokidetza klase bakar bat egin badaiteke, hau da, estuki konektatutako osagai bakarra duen grafoa bada, orduan *estuki konektatutako grafoa* dela esango dugu.

G^R **grafoaren propietateak.**

1. akzesibilitatea mantentzen da, hau da, x_i erpinetik x_j erpina akzesiblea bada orduan $x_i$ren klaseari dagokion erpinetik $x_j$ren klaseari dagikion erpina akzesiblea da. Era berean alderantzizko akzesibilitatea ere mantentzen da.
2. G^R grafoa ziklorik gabeko grafoa da.

2.4 Oinarria: B

G grafoko erpin guztiak akzesible dituen erpinen azpimultzo minimalari oinarria deituko diogu, beraz ondorengo bladintza hauek bete behar ditu B oinarriak:

$$B \subset X \begin{cases} R(B) = X \\ \forall S \subset B \; R(S) \neq X \end{cases}$$

2.4.1 Oinarri baten propietateak

1. $\forall x_i \in B, x_j \in B / x_i \neq x_j \Rightarrow x_i \notin R(x_j)$ Hau da, oinarriko erpin bat ez da inoiz oinarriko beste erpin batetatik akzesible izango.
2. $\forall x_i, x_j \in B / x_i \neq x_j \Rightarrow x_i$ eta x_j estuki konektatutako osagai desberdinetakoak dira.
3. Ziklorik gabeko grafoaren oinarria bakarra da eta bera $d^- = 0$ duten erpinek osatzen dute.

Azken propietate honen aruaera G^R grafo murriztuaren oinarria bakarra da eta gainera erraza da jakitea zein erpinek osatzen duten, honi B^R deituko diogu.

G grafoaren oinarriak lortzeko lehenengo G^R bilatu behar da, ondoren grafo murriztu horren oinarria lortu, B^R, eta azkenik B^Rko osagai bakoitzetik erpin bat hartu. Horrela lor daiteken edozein azpimultzo G grafoaren oinarri bat da.

2.5 Kontra-oinarria: $\overline{B}$

G grafoko erpin guztietatik akzeditu daiteken erpinen azpimultzo minimalari kontra-oinarria deituko diogu, beraz ondorengo bladintza hauk bete behar ditu $\overline{B}$ kontra-oinarriak:

$$\overline{B} \subset X \begin{cases} Q(\overline{B}) = X \\ \forall S \subset \overline{B} \; Q(S) \neq X \end{cases}$$

2.5.1 Kontra-oinarri baten propietateak

1. $\forall x_i, x_j \in \overline{B} / x_i \neq x_j \Rightarrow x_i \notin Q(x_j)$ Hau da, oinarriko erpin bat ez da inoiz oinarriko beste erpin batetatik alderantziz akzesible izango.

2. $\forall x_i, x_j \in \overline{B} / x_i \neq x_j \Rightarrow x_i$ eta x_j estuki konektatutako osagai desberdinetakoak dira.

3. Ziklorik gabeko grafoaren kontra-oinarria bakarra da eta bera $d^+ = 0$ duten erpinek osatzen dute.

   G grafoaren kontra-oinarriak lortzeko oinarriak lortzeko egiten den antzekoa egin behar da.

2.6 Konektibitatea: K

x_i eta x_j erpinak konektatuta daudela esango dugu baldin, eta soilik baldin, grafo sinplifikatuan, G_s, $x_i$tik x_j akzesiblea bada.

$$x_i K x_j \Leftrightarrow x_j \in R_{G_s}(x_i)$$

- K erlazioa baliokidetza erlazioa da, eta ondorioz X erpinen multzoa klasetan banatu dezakegu.
- X/K partizioak induzitutako grafo kondentsatua p erpindun grafo dejeneratua da, eta p partizioaren klase kopurua da.
- Partizioaren klase batetatako erpinek osatzen duten azpigrafoari *osagai konektatua* deituko diogu.
- Osagai konektatu bakarreko grafoari *grafo konektatua* deituko diogu.
- G estuki konektatua $\Rightarrow$ G konektatua. Baina beste aldera ezin da esan.

2.7 Matrizeak eta konektibitatea

Ordenadoreetan grafoak adierazteko oso baliagarri dira matrizeak, erabiltzen errazak,eta gainera grafoen informazio osoa matrize bitartez ager daitekela ikusi genuen aurreko gaian. Horretaz gain grafo baten osagai konektatuak eta osagai estuki konektatuak lortzeko ere erabilgarriak dira matrizeak, horretarako bi matrize berri definituko ditugu, akzesibilitate matrizea eta alderantzizko akzesibilitate matrizea. Bi matrize hauek sortzea oso erraza da, programa errez baten bitartez egin daitezke, eta hauekin grafoen osagai konektatuak eta osagai estuki konektatuak nola lortu ikusiko dugu. Orain arte ikusitakoarekin osagai hauek lortuz gero grafo murriztua, oinarria eta kontra-oinarria lortzea oso erraza dela badakigu, beraz programa bitartez lortzeko modua ere erreza izango da.

2.7.1 Akzesibilitate matrizea: $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}_{nxn} = [r_{i,j}] \begin{cases} r_{i,j} = 1 & \text{baldin } x_j \in R(x_i) \\ r_{i,j} = 0 & \text{baldin } x_j \notin R(x_i) \end{cases}$$

Definizio honen arauera nxn dimentsioetako matrizea da eta bere elementuen balioa 1 edo 0 izango da:

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \dots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

2.7.2 Alderantzizko akzesibilitate matrizea: $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q}_{nxn} = [q_{i,j}] \begin{cases} q_{i,j} = 1 & \text{baldin } x_j \in Q(x_i) \\ q_{i,j} = 0 & \text{baldin } x_j \notin Q(x_i) \end{cases}$$

Hau ere aurrekoa bezala *nxn* dimentsioetako matrizea da eta bere elementuen balioa 1 edo 0 izango da:

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix}$$

Bi matrize hauek zenbait ezaugarri dituzte:

- $r_{i,i} = q_{i,i} = 1$ beraz bi matrizeen diagonal nagusia batekoz osaturik dago.
- i lerroan $r_{i,j} = 1$ duten j zutabeak dagozkien erpinek $x_i$tik akzesible diren erpinen multzoa osatzen dute.
- j zutabean $r_{i,j} = 1$ duten i lerroak dagozkien erpinek x_j erpina akzesible duten erpinen multzoa osatzen dute.
- $\mathcal{R}^t = \mathcal{Q}$ eta ondorioz aurreko bi ezaugarriak alderantzizko akzesibilitate matrizeari ere atxeki diezaizkiokegu, baina lerroen ordez zutabea erabiliz eta zutabeen ordez lerroa erabiliz.
- Zuzendu gabeko grafoetan bi matrizeak berdinak dira: $\mathcal{R} = \mathcal{Q}$

2.8 Grafo baten osagai konektatuak lortzeko era

Osagai konektatuak grafo sinplifikatuaren arauera definitzen ziren eta beraz grafo sinplifikatuan oinarrituko gara. Hasteko grafo sinplifikatuaren $\mathcal{R}$ matrizea eraiki behar da. Matrize hau bi eratakoa izan daiteke:

1. Batekoz osatutako matrizea: kasu honetan erpin guztiak osagai konektatu berekoak dira, hau da, grafoa konektatua litzateke.

2. Batekoak eta zeroak agertzen dira matrizean: Kasu honetan lerroen kokapena elkar trukatuz eta zutabeen kokapena elkar trukatuz matrizearen itxura alda dezakegu matrizearen diagonal nagusiaren inguruan batekoz osatutako blokeak sortuaz, eta beste guztia zeroz osatuta utziaz. Batekoz osatutako bloke horien kopurua grafoaren osagai konektatu kopurua izango da eta bloke bakoitza dagokion erpin multzoak osagai konektatu bat osatzen du. Matrizeak itxura aldatu ondoren ondoko honen antza izango du:

$$
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\
. & & . & . & & . & \dots & . & & . \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & & 0 & \dots & 0 \\
. & & . & . & & . & \dots & . & & . \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & & 0 & \dots & 0 \\
 & . & & & . & & & & . & \\
 & . & & & . & & & & . & \\
 & . & & & . & & & & . & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & 1 \\
. & & . & . & & . & \dots & . & & . \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

2.9 Grafo baten osagai estuki konektatuak lortzeko era

Lehenengo, grafoaren $\mathcal{R}$ eta $\mathcal{Q}$ eraiki behar dira, ondoren, bi matrize hauen elementuak bata bestearekin biderkatuz $\mathcal{R} \otimes \mathcal{Q}$ sortu behar da, matrize berri hau ere nxn dimentsioduna da eta bere elementuen balioa 1 edo 0 izango da:

$$
\mathcal{R} \otimes \mathcal{Q} = [z_{i,j}] \begin{cases} z_{i,j} = 1 & \text{baldin } r_{i,j} = 1 \text{ eta } q_{i,j} = 1 \\ z_{i,j} = 0 & \text{bestela} \end{cases}
$$

$z_{i,j} = 1$ baldin bada, orduan $x_j \in R(x_i)$ eta $x_j \in Q(x_i)$. Edo beste era batetara esanda, $x_j \in R(x_i)$ eta $x_i \in R(x_j)$. Azken hau konexio estuaren definizioa da beraz $z_{i,j} = 1$ denean x_i eta x_j estuki konektatuta daudela esan nahi du.

Matrize honetan, aurrekoan bezala, bi egoera egon daitezke:

1. Batekoz osatutako matrizea: kasu honetan erpin guztiak osagai estuki konektatu berekoak dira, hau da, grafoa estuki konektatua litzateke.
2. Batekoak eta zeroak agertzen dira matrizean: Kasu honetan lerroen kokapena elkar trukatuz eta zutabeen kokapena elkar trukatuz matrizearen itxura alda dezakegu matrizearen diagonal nagusiaren inguruan batekoz osatutako blokeak sortuaz, eta beste guztia zeroz osatuta utziaz. Batekoz osatutako bloke horien kopurua grafoaren osagai estuki konektatu kopurua izango da eta bloke bakoitzari dagokion erpin multzoak osagai estuki konektatu bat osatzen du. Matrizeak itxura aldatu ondoren aurreko matrizaren antzeko itxura edukiko du.

2.10 teorema

G grafo konektatu sinplea bada ondorengo hau egiaztatzen da:

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

2.11 G grafoaren konektibitatea: $C(G)$

Ggrafoa deskonektatzeko edo erpin isolatuetan bihurtzeko kendu behar de erpin *kopuru txikienari* G grafoaren konektibitatea deituko diogu.

2.11.1 h-konektatua

G grafoa h-konektatua dela esango dugu bere konektibitatea h edo haundiagoa baldin bada. $C(G) \geq h$.

2.12 2. teorema

G grafo konektatuaren konektibitatea bere edozein erpinen graduaren berdina edo txikiagoa da. $C(G) \leq d(x_i)\ \forall x_i \in X$

2.12.1 Honen ondorioa

$C(G) \leq \frac{2m}{n}$ Aurreko teoremaren ondorioz espresio hau egiazkoa dela argi ikus daiteke.

2.13 Artikulazio multzoa

G grafotik kentzean grafoa deskonektatuko zukeen edozein erpin multzo artikulazio multzoa dela esango dugu.

- $\mathcal{A}$ artikulazio multzoen familia bada orduan G grafoaren konektibitatea multzo horietan elementu gutxien dituen multzoaren kardinalitatea da: $C(G) = \min_{A \in \mathcal{A}} |A|$
- G grafoa h-konektatua bada:

$$\begin{cases} h \leq n-1 & h = C(G) \leq n-1 \\ \nexists A \in \mathcal{A} \, / |A| \leq n-1 & h \leq C(G) = \min |A| \end{cases}$$

2.14 Artikulazio erpina edo puntua

Grafotik kentzean grafoa deskonektatuko zukeen erpinari artikulazio erpina deituko diogu. Artikulazio erpin hau elementu bakar bateko artikulazio multzo bat da.

2.15 3. teorema

w erpina artikulazio erpina da $\Leftrightarrow$ u eta v erpinak aurki ditzakegu zeinak betetzen dute w bi horien arteko kate guztietan arkitzen da.

2.16 G grafoaren blokeak

G grafoaren blokeak bere azpigrafo konektatu, artikulazio punturik gabe eta maximalak dira. Ondorioz blokea gutxienez 2-konektatua izango da eta gutxienez 3 erpin izango ditu.

2.17 4. teorema

Bloke batetako 2 erpinen artean beti dago biak dauzkan zikloren bat.

2.18 Grafo banagarriak. Grafo banaketa

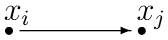
Konektibitatea 1 duen grafoa grafo banagarria dela esango dugu, hau da artikulazio puntuak dituen grafoa banagarria da. Grafo banagarri hauek azpigrafo partzialetan banatuko ditugu, horretarako artikulazio erpin bakoitza bikoiztuko dugu. Adibidez demagun $G = (X, U)$ grafoak artikulazio erpin bat, x_i, duela. Beraz $X = X_1 \bigcup \{x_i\} \bigcup X_2$ banaketa egin dezakegu, eta banaketa honetan X_1eko edozein erpinen eta X_2ko edozein erpinen arteko bide guztietan x_i erpina agertzean da. Hau honela izanik ondorengo banaketa egin dezakegu:

$$G_1 = (X_1 \cup \{x_1\}, U_1) \text{ non } U_1 = U \bigcap [[X_1 \cup \{x_i\}]x[X_1 \cup \{x_i\}]]$$

$$G_2 = (X_2 \cup \{x_1\}, U_2) \text{ non } U_2 = U \bigcap [[X_2 \cup \{x_i\}]x[X_2 \cup \{x_i\}]]$$

Banaketa honen bidez lortzen diren azpigrafoak bi motatakoak izan daitezke:

1. blokeak: 3 erpin edo gehiago dituztenak eta 2-konektatuak.
2. istmoak: 2 erpin besterik ez dituena eta bien artean ertz bat.



2.18.1 Banaketaren propietateak

- Ertz bakoitza azpigrafo bakar batetan gelditzen da.
- Artikulazio puntu ez den erpin bakoitza bloke ala istmo bakar batetan gelditzen da.
- zirkuito bat osatzen duten erpin guztiak bloke berean gelditzen dira

2.19 Grafoen sailkapena konektibitatearekiko

$$\text{Grafoa} \begin{cases} \text{deskonektatua. kasu honetan osagaiak hartzen dira} \\ \text{konektatua } (C \geq 1) \begin{cases} \text{banaezina. } (C \geq 2) \\ \text{banagarria. } \begin{cases} \text{blokeak} \\ \text{istmoak} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Chapter 3

Planaritatea

3.1 Jordanen kurba (itxia)

Bere burua inoiz mozten ez duen kurbari Jordanen kurba deritzo, kurba horren hasera eta bukaera puntu bera bada, orduan kurba itxia izango da.

3.1.1 Jordanen teorema

Planoan Jordanen C kurba itxia hartuta, x eta y puntoak C kurbakoak badira, orduan, x eta y puntuak dituen beste edozein Jordanen kurba C kurbaren barnean gelditzen da ala kanpoan gelditzen da ala C kurba moztu egiten du.

3.2 G grafoaren barneraketa: $\widehat{G}$

Espazio batetan marraztutako $\widehat{G}$ grafoaren erpinak espazio horretako puntuak izango dira eta ertzak edo arkoak erpin horiei dagozkien puntuak lotzen dituzten eta elkarren artean mozten ez diren Jordanen kurbak. G grafoa espazio horretan marraztutako $\widehat{G}$ grafoaren isomorfoa bada G grafoa espazio horretan barneragarria dela esango dugu. Kasu horretan $\widehat{G}$ grafoa G grafoaren barneraketa izango da, eta espazio horretako edozein x punturi, puntu horrek ez badu erpinik adierazten eta ez bada $\widehat{G}$ren arko batetako puntu bat *puntu disjuntoa* deituko diogu.

3.2.1 1. Teorema

Edozein grafo hiru dimentsiotako espazio euklideoan barneratu daiteke.

3.3 grafo laua edo planarra

Planoan barneratu daiteken grafoari grafo laua deituko diogu.

3.3.1 2. Teorema

Grafo bat laua da baldin, eta soilik baldin esferaren azaleran barneratu badaiteke.

3.3.2 3. Teorema

K_5 eta $k_{3,3}$ ez dira grafo lauak.

3.4 Aurpegia: F

G grafoaren $\widehat{G}$ adierazpide planarra hartuta, grafoaren ertzek mugatzen duten erregio konektatuari aurpegia deituko diogu.

- x eta y puntuak F aurpegikoak badira, eta $\widehat{G}$rekiko disjuntoak badira, orduan punto guztiak $\widehat{G}$rekiko disjuntoak dituen kurba baten bidez lotu daitezke, hau da, $\widehat{G}$ren arkorik mozten ez duen kurbaren bidez lotu daitezke.
- Gren adierazpide planar guztietan mugarik gabeko aurpegi bat dago beti, aurpegi honek $\widehat{G}$ inguratzen du eta kanpo aurpegia deituko diogu.

3.4.1 4. Teorema

G grafoaren $\widehat{G}$ barneraketa laua hartuta, beti aurki daiteke $\widehat{G}$ren edozein barne aurpegi kanpo aurpegian bihurtzen duen beste barneraketa laua.

3.5 5.Teorema. Euler

G grafoa konektatua eta planoan barneragarria bada, grafo horren planoko edozein barneraketak honako hau betetzen du:

$$n - m + f = 2$$

$n = |X|$ erpin kopurua.
$m = |U|$ ertz kopurua.
$f = |F|$ aurpegi kopurua.

3.5.1 5.1 Ondorioa

K osagai konektatu dituen grafoaren barneraketak $n-m+f = k+1$ betetzen du.

3.5.2 5.1 Lema

G grafoa planarra bada bere edozein barneraketak ondorengo ekuazioa betetzen du:

$$2m = \sum d(f_i) = \sum_j jn(j)$$

$d(f_i)$: f_i aurpegiaren gradua da, hau da, f_i aurpegia mugatzen duten ertz kopurua.
$n(j)$: j gradua duen erpin kopurua da.

3.5.3 5.2 Ondorioa

G grafoa planarra eta konektatua bada eta bere ertz kopurua 2 edo gehiagokoa bada, orduan $m \leq 3n - 6$ betetzen da.

3.5.4 5.3 Ondorioa

G grafoa planarra eta bialdeduna bada eta bere ertz kopurua 2 edo gehiagokoa bada, orduan $m \leq 2n - 4$ betetzen da.

3.5.5 5.4 Ondorioa

G grafoa planarra eta konektatua bada, orduan gehienez 5 gradua daukan erpina beti edukiko du.

3.5.6 5.5 Ondorioa

G grafoa konektatua eta planarra bada eta bere aurpegi bakoitza p kardinalitateko zirkuitoa bada, orduan ondorengo ekuazioa betetzen da:

$$m = \frac{p(n-2)}{(p-2)}$$

3.6 6. Teorema

G grafo planarra da $\Leftrightarrow$ Gren bloke bakoitza planarra da

3.7 7. Teorema. Kuratowsky

G grafo planarra da $\Leftrightarrow$ ez dauka k_5 edo $k_{3,3}$ grafoen homeomorfikoa den azpigraforik.

3.8 8. Teorema

G grafo planarra da $\Leftrightarrow$ ez dauka k_5 edo $k_{3,3}$ grafoetara uzkurtu edo kontraitu daiteken azpigraforik.

3.9 Planaritatea ikertzeko pausoak

1. G^* konektatu gabea baldin bada, osagai konektatu bakoitza bere aldetik begiratu behar da.
2. G^* banagarria baldin bada, banaketa egin eta bloke bakoitza bere aldetik begiratu.
3. Bigiztak kendu.
4. Ahalik eta ertz gutxien dituen grafo homeomorfikoan bihurtu, horretarako 2 graduko erpinak kendu eta bere bi ertzak bakar batetan bihurtu.
5. Ertz paraleloak kendu, bakarra utzi. eta berriz saiatu aurreko pausora joan pauso horretan ezer egin ezin den arte.

6. Oinarrizko testak egin: halabeharrezko baldintzak betetzen diren ala ez begiratu.
    - $m \leq 9$ edo $n \leq 5$ orduan grafo planarra da.
    - $m \geq 3n - 6$ orduan ez da planarra.
    - Test aurreratuagoak egin.
7. G ez bada oso haundia planoan irudikatzen saiatu, horretarako ziklo haundienetik hasi eta bere zubiak jartzen joan. Planoan irudikatzea lortu ezkero grafo planarra izango da.
8. Saiatu k_5 edo $k_{3,3}$ grafoen homeomorfikoak diren azpigrafoak bilatzen, lehenengoarentzat 5 erpin bilatu behar dira, bigarrenarentzat 6, talde egokiak aukeratu behar dira eta besteetaz ahaztu.

3.10 Barneraketa planarra lortzeko algoritmoa

3.10.1 Pieza

Har dezagun G grafoaren azpimultzo bat, $H \subset G$. Hrekiko G grafoko pieza bat ondorengo baldintzetako bat betetzen duena izango da:

- H azpigrafoko bi erpinen arteko baina Hkoa ez den edozein ertz pieza izango da.
- $G - H$ grafoko edozein osagai konektatu gehi osagai horretatik H azpigrafora inzidente den ertz multzoa.

H azpigrafoko eta piezakoak diren erpinei kontaktu puntu deituko diegu, eta pieza batek bi kontakto puntu edo gehiago baditu piezari zubia, B, deituko diogu.

G grafoa bloke bat denean bere edozein azpigraforen piezak beti zubiak dira.

Zubi marrazgarria

H azpigrafoaren aurpegi batetan B zubia marrazgarria dela esateko zubiaren kontaktu puntu guztiak aurpegi horren ertzetan egon behar dute. Gerta liteke zubi bat aurpegi bat baino gehiagotan marrazgarria izatea, kasu honetan aurpegi multzo honi $F(B,H)$ deituko diogu.

9. Teorema

C G grafoaren zirkuito bat baldin bada, orduan Crekiko zubi ororen edozein kontaktu punto bikoteren artean C zirkuitoko ertzik erabiltzen ez duen kate bat aurki daiteke, kate horrek C zirkuitoak mugatzen duen aurpegia bitan banatzen du.

3.10.2 G blokearen planaritatea ikertzeko Demoncron,Malgrange eta Pertuiseten algoritmoa

Algoritmo honek G_1,$G_2 \ldots G_k$ azpigrafoak aurkitzen ditu, azpigrafo hauek bata bestearen azpigrafo dira, $G_i \subset G_{i+1}$, eta guztiek planoan barneraketa bat dute. G blokea laua bada orduan algoritmoak bere barneraketa planar bat aurkitzean bukatzen du,$\widehat{G}_{m-n+1}$. Baina blokea ez bada laua orduan azpigrafo horietako batekiko zubi ez marrazgarri bat topatzean gelditzen da, alegia, $G_i$ren B zubia ezin bada bere aurpegietakoren batetan marraztu ($F(B,\widehat{G_i}) = 0$) orduan ezingo da G_{i+1} azpigrafo laua lortu, horretarako nahitaezko baldintza bait da zubi guztiak marrazgarriak izatea aurpegiren batetan. Algoritmo honek egiten duena ondorengo pausoetan agertzen da:

- G blokearen zirkuito bat hartzen du eta hori izango da G_1, noski zirkuito bat beti planoan barneragarria da.
- G_i barneragarria den bitartean eta G ren azpigrafoa den bitartean:
- $G_i$rekiko zubiak bilatzen ditu eta marrazgarriak diren ala ez baegiratzen du, marrazgarria ez denik aurkituko balu blokea laua ez dela esanaz bukatuko luke.
- G_i azpigrafoari aukeratutako zubiaren kontaktu puntu bikotearen arteko katea gehitzen dio, horrela lortutako azpigrafo berria izango da G_i berria.

- Gehitu dugun katearekin lortutako azpigrafoa aztertzen ari garen blokea bera bada bloke horren planoko barneraketa lortu dugu, beraz blokea laua da.

3.11 Ariketak

1. G grafo planarraren aurpegi bakoitzaren ertz kopurua 5 edo gehiago dela jakinda, m eta n erlazionatzen dituea beharrezko baldintza lortu.

2. Grafo planarretan f eta n erlazionatuz bete beharreko baldintza lortu.

3. Grafo planarrean erpin bakoitzaren gradua 5 edo gehiago bada orduan grafoan gutxienez 12 erpinen gradua 5 da.

4. Gehienez zenbat ertz gehitu aitezke grafo planar batean planaritatea galdu gabe?

5. Grafo bat eta bere osagarria planarrak izan daitezen $n^2 - 13n + 24 \leq 0$ baldintza bete behar dela. Ba al dago n baliorik baldintza hori betetzea galerazten duenik?

6. 6 erpin eta 12 ertzeko edozein grafo planar eta konektatuk 4 gradua edo gutxiagoko erpina daukala frogatu.

7. Grafo konektatute eta planar orok, 30 ertz baino gutxiago baditu 4 graduko edo gutxiagoko erpina daukala frogatu.

8. Grafoa zeharo erregularra izan dadin erregularra izateaz gain, erpin guztiek gradu bera edukitzeaz gain, bertako aurpegi guztien ertz kopuruak ere beti bera izan behar du. Zeharo erregularrak diren grafoek ondorengo baldintza betetzen dutela frogatu:

   $$n = \frac{4p}{2d - p(d-2)}$$

   d aldagaiari balioak emanez zein posibilitate dauden agertu.

9. G gafoaren barneraketa planarrari dagokion G^* grafo duala ondorengo grafoa da:

   - G grafoko aurpegi bakoitzeko G^* grafoan ertz bat agertuko da.
   - G grafoko ertz bakoitzeko G^* grafoan ertz bat agertuko da, G grafoko ertzak bi motatakoak izan daitezke:
     (a) Ertzak bi aurpegi banatzen ditu. kasu honetan G^* grafoko ertz berriak bi aurpegi hauei dagozkien erpinak lotuko ditu.

    (b) Ertza aurpegi baten barruan gelditzen da, hau da, ez da bi aurpegiren arteko muga. Beste kasu honetan aurpegi horri dagokion erpinari bigizta jarri behar zaio.

  (a) Definizio honetan oinarrituz grafo baten bi barneraketa ezberdinei dagozkien grafo dualek zein erlazio edukiko dute?
  (b) Grafo autoduala bere dualaren isomorfoa da, eta hori gerta dadin $2n = m + 2$ bete behar duela frogatu. Nahikoa al da baldintza hori?
  (c) Nola eraiki genezake grafo autoduala, $n > 4$ badu?

10. G grafo planarra izanik:
    - $n = 5$ edo $n = 6$ bada G edo bere osagarria planarra da.
    - $n = 7$ bada eta K_5 edo $K_{3,3}$ bere azpigrafo partzialak badira orduan bere osagarria planarra da.
    - $n = 8$ daukan eta planarra ez den grafoa marraztu, eta bere osagarria ere planarra izanik.
    - $n = 8$ daukan eta planarra den grafoa marraztu, eta bere osagarria ere planarra izanik.

11. Izan bedi G grafo planar maximala, n_i aldagaiak i gradua daukaten erpin kopurua adierazten badu, $i = 3, 4, \ldots p$ izanik, ondorengoa betetzen dela frogatu.

12. Izan bedi Z zuhaitza, eta izan bitez e_1, e_2, e_3 zuhaitzari gehitutako hiru ertz. Frogatu $Z + e_1 + e_2 + e_3$ planarra dela.

13. Orain arte azaldutakoa jarraituz ondorengo grafoa planarra den ala ez azaldu.

14. G 6-konektatua bada planarra ez dela frogatu.

Chapter 4

Zuhaitzak

4.1 Zuhaitzen karakterizazioa

4.1.1 Grafo aziklikoa

Ziklorik ez duen grafoari grafo aziklikoa deituko diogu.

1. Teorema

2 erpin edo gehiago dituen, konektatua den eta aziklikoa den grafo guztiek gutxienez segidakorik ez duen erpin bat eta gutxienez aurrekorik ez duen beste erpin bat daukate.

4.1.2 Zuhaitza

Zuhaitza grafo konektatu aziklikoa da, T ikurraz adieraziko dugu. Zuhaitza definitzeko era asko daude, bat oraintxe aipatutako definizioa da, baina ondorengo definizioak ere baliokideak dira:

1. G grafoko erpin bikote ororen artean kate bakar bat dago.
2. G konektatua da eta $n-1$ ertz dauzka.
3. G grafoa aziklikoa da eta $n-1$ ertz dauzka.
4. G grafoa aziklikoa da eta bertako auzokide ez diren edozein erpin bikote a ertzaren bitartez lotu ezkero orduan $G+a$ grafoak ziklo bat (bakarra) edukiko du.

5. G grafoa konektatua da eta bertako auzokide ez diren edozein erpin bikote a ertzaren bitartez lotu ezkero orduan $G + a$ grafoak ziklo bat (bakarra) edukiko du.

1. teoremaren ondorioa

2 erpin edo gehiagoko zuhaitz orok 1 graduko gutxienez bi erpin ditu.

basoa

Osagaitzat zuhaitzak dituen grafo ez konektatuari basoa deituko diogu.

4.2 Grafo etiketatuak

4.2.1 Erpinak etiketatzea

Erpinen multzoaren eta 1etik $n$ra bitarteko zenbaki osoen artean korrespondentzi biunibokoa ezartzeari erpinak etiketatzea deituko diogu, erpin bakoitzari zenbaki ezberdin bat egokitzen diogu.

4.2.2 Grafo etiketatua

Erpinak etiketatuta dauzkan grafoari grafo etiketatua deituko diogu

4.2.3 2: Teorema: Kayley

n erpin etiketatu dauzkan n^{n-2} zuhaitz ezberdinek existitzen dute. Beste era batetara esateko, K_n grafoan n^{n-2} zuhaitz ezberdin hedatu ditzakegu (hau aurrerago agertuko dugun zuhaitz hedatuen definizioarekin errezago ager daiteke).

Teorema hau frogatzeko etiketatutako n erpineko zuhaitz ezberdinen artean eta $S = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ ordenatutako zenbaki multzoen artean korrespondentzi biunibokoa ezartzen da, non $a_i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Argi dago n elementurekin $n - 2$ elementutako n^{n-2} multzo ezberdin egin daitezkela, beraz, etiketatutako grafoen artean eta zenbaki multzo hauen arten korrespondentzi biunibikoa aurkituko bagenu zuhaitz ezberdinen kopurua hori dela jakin ahal izango genuke. Korrespondentzia hori ondorengo hau izan daiteke:

n erpin dituen T zuhaitza hartuta, barari dagokion $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ lortzeko ondorengo prozedura jarraitu:

- $i = 1$
- 1 gradua duten erpinen arten etiketa txikiena daukana aukeratu, beti dago zuhaitzean 1 graduko erpina. Erpin hauek auzokide bakarra daukate.
- $a_i =$ aukeratu dugun erpinaren auzoko erpinaren etiketa.
- Zuhaitzetik aukeratu dugun erpina kendu.
- $i = i + 1$
- Aurreko lau pausoak errepikatu zuhaitzean 2 erpin besterik gelditzen ez den bitartean.

Prozedura honekin lortzen ditugun zenbakietan inoiz ez da egongo 1 gradua duen erpin baten etiketa, hori ez bait da izango sekula 1 gradua duen erpin baten auzokide (hori gertatzeko grafoak 2 erpin bakarrik eduki ditzake, baina kasu horretan prozedura bukatuzat jotzen da).

Honen alderantzizko prozedura, $S = (a_1, \ldots a_{n-2})$ hartuta zuhaitza lortzeko prozedura alegia, ondorengoa da:

- S listan agertzen ez den etiketa posibleetako txikiena aukeratu.
- Aukeratu dugun etiketari dagokion erpinaren eta Sko lehenego etiketari dagokion erpinaren artean ertza jarri.
- Etiketa posibleen artetik aukeratu dugun etiketa kendu, eta Stik lehenengo etiketa kendu.
- Aurreko hiru poausoak egin Sko etiketa guztiak bukatu arte.
- Gelditu zaizkigun bi etiketa posibleen artean ertza jarri.

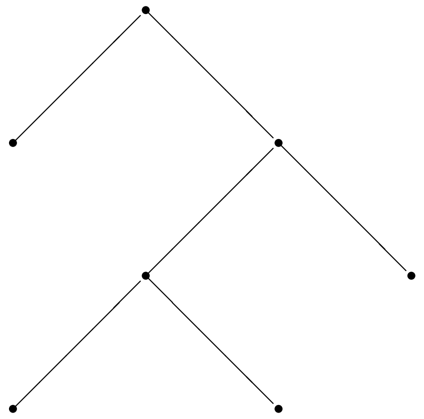
Era honetara lortzen dugun zuhaitza haserako bera da, beraz bila genbiltzan korrespondentzi biunibokoa aurkitu dugu eta ondorioz zuhaitz ezberdin kopurua n^{n-2} da.

4.2.4 Errodun zuhaitza

Erpin bat markatuta daukan zuhaitza errodun zuhaitza dela esango dugu.

4.3 Zuhaitz bitarra

zuhaitz bitarra errodun zuhaitz mota berezi bat da, zuhaitz bitarrean erpin bakar batek bi gradua dauka, eta beste guztiek bat edo hiru graudua daukate. Bi gradoko erpina errotzat hartzen da. Adibidez:



Ikus daitekenez goiko erpinak 2 gradua dauka, erroa hori da, eta beste guztiek bat edo hiru gradua daukate.

4.3.1 Zuhaitz bitarren propietateak

- Zuhaitz bitarraren erpin kopurua zenbaki bakoitia da.
- Zuhaitz bitarrean zintzilik dagoen erpin kopurua $p = \frac{n+1}{2}$ da. Gradua bat daukaten erpinak *zintzilik* daudela esango dugu, besteei *barne erpinak* deituko diegu.
- Zuhaitz bitarrean dagoen barne erpin kopurua $p-1$ da, hau da, zintzilik dagoen kopurua baino bat gutxiago.
- Zuhaitzetan bi erpinen arteko ertz katea bakarra denez, errodun zuhaitzetan errotik erpin batetara dagoen katea bakarra izango da, kate ho-

nen kardinalitateari *erpinaren maila deituko diogu*, erroaren maila 0 izanik. Zuhaitzaren *sakonera* erpinen maila altuena izango da, l_{max}. Kontzeptu hauek kontutan hartuta, zuhaitz bitarrek eduki dezaketen sakonera minimoa $\log(n+1)-1$ baino haundiagoa den zenbaki osoa izango da.

- Era berean zuhaitz bitarren sakonera maximoa $\frac{n-1}{2}$ izango da.
- Zintzilik dauden erpinen mailen batuketa, $\sum_{i=1}^{p} l_i$, errodun zuhaitzaren *kanpo maila* dela esango dugu. Kanpo maila minimoa duen zuhaitz bitarrak $l_{max}-1$ mailan $2^{l_{max}-1}$ erpin edukiko ditu.
- Zuhaitz bitarraren zintzilik dauden erpinei bere mailaz gain, l_i-z gain, pisu bat ezartzen badiegu, hau da erpin baikoitzari w_i pisua ezartzen badiogu, zuhaitzaren *kanpo maila pisutsua* $\sum_{i=1}^{l} w_i l_i$ expresioari deituko diogu. Kanpo maila pisutsu hau minimoa egiten duen zuhaitz bitarra optimoa edo hobezina dela esango dugu.

4.4 Erpinen arteko distantzia: $d(x_i, x_j)$

G grafo konektatua eta zuzendu gabea hartuta, $d(x_i, x_j)$ bi erpinen artean dauden kateen kardinalitate txikienari deituko diogu, zuhaitzen kasuan bi erpinen artean kate bakarra dagoenez, beraien arteko distantzia kate bakar horren kardinalitatea izango da. Kardinalitate txikiena duen kateari x_i eta x_j erpinen *geodesikoa* deituko diogu. Kontutan eduki behar da distantzia, guk definitu dugun bezala metrika bat dela.

4.4.1 Erpinaren zentrobanatasuna: $e(x_i)$

x_i erpinaren zentrobanatasuna erpin horrek beste erpinekiko duen distantzia haundiena da:

$$e(x_i) = \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

4.4.2 Grafoaren erradioa: $r(G)$

Grafoaren erpinen zentrobanatasun txikiena grafoaren erradioa dela esango dugu.

4.4.3 Grafoaren diametroa: $d(G)$

Erpinen zentrobanatasun haundiena berriz, diametroa izango da.

4.4.4 Erpin zentralak, grafoaren zentroa

zentrobanatasun txikiena duen erpina zentrala dela esango dugu, erpin horren zentrobanatasuna grafoaren erradioa izango da beraz. Grafo batetan erpin zentral bat baino gehiago egon daitezke, erpin hauek grafoaren zentroa osatuko dute.

3. teorema

Edozein zuhaitzen zentroa erpin bakar batez ala auzokide diren bi erpinez osatua dago.

4.5 Zuhaitz zuzendua

Ziklorik ez duen grafo zuzendu mota da zuhaitz zuzendua, bertan erpin guztiek, erroak izan ezik, graduerdi negatibo bat daukate, $d^- = 1$. Erroak graduerdi negatibo bezala 0 dauka, $d^- = 0$, hau da, errora ez da arkurik iristen baina beste erpin guztietara arku bat iristen da.

- Zuhaitzetan edozein erpin erroa izan daiteke
- Zuhaitza zuhaitz zuzenduan bihurtzeko bertako erpin bat aukeratu erroa izan dadin eta ertzei orientazioa eman behar zaie erroa eta beste edozein erpinen artean bide bat sortuaz. Bide hori bakarra izango da zuhaitzetan bi erpinen artean kate bakar bat egon bait daiteke.
- Zuhaitz zuzenduetan dauden bideak erroa eta beste edozein erpinen artekoak bakarrik dira.

4.6 Zuhaitz hedatua: Spanning tree, SP

Zuzendu gabeko G grafoaren zuhaitz hedatua bere azpigrafo partziala den edozein zuhaitzi deitzen zaio. Azpigrafo partziala denez erpin guztiak agertuko dira zuhaitz hedatuan, baina ertzak ez dira guztiak izango, noski.

4.6.1 4. teorema

G grafoa konektatua bada orduan gutxienez zuhaitz hedatu bat edukiko du.

4.6.2 Adarra

Zuhaitzaren edozein ertz adar izenez adierazi daiteke

4.6.3 Korda, zuhaitz hedatuei dagokionez

G garfoaren zuhaitz hedatu batekiko korda G grafoko zuhaitz hedatuan ez dagoen edozein ertz da. Korda bat zuhaitz hedatu bati gehituko bagenio, orduan, lortutako azpigrafo berriak ziklo bat (bakarra) edukiko luke.

4.6.4 5. teorema

G grafu konektatuaren edozein zuhaitz hedatuk $n-1$ adar dauzka, eta berekiko $m-n+1$ korda daude

4.6.5 Gren heina: $rg(G)$

G grafoaren heina bere edozein zuhaitz hedatuk duen adar kopurua da.

4.6.6 Gren hustasuna: $\mu(G)$

G grafoak daukan korda kopuruari deitzen zaio hustasuna. Zenbaki ziklomatiko izena ere ematen zaio eta zenbait kasutan Bettiren zenbaki bezala erabiltzen da.

- Heina + hustasuna ertz kopurua da: $rg(G) + \mu(G) = m$
- Hustasunak grafoko zirkuito independiente kopurua adierazten du. Hau Bettiren zenbaki bezala ezagutzen da.

4.6.7 6. teorema

Bigiztarik gabeko grafoan dagoen ST kpurua ondorengo determinanteak adierazten du:

$$| B^* B^{*t} |$$

B^* G grafoko ertzak nahi dugun moduan orientatuz lortzen den inzidentzi matrrizeari lerro bat kenduta geratzen den matrizea da. B^{*t} berriz aurrekoaren iraulia da.

G grafoa osotua bada orduan grafo horretan aurki genitzaken ST kopurua n^{n-2} da, eta hau 2. teoremagatik dakigu, Kayleyren teoremagatik.

4.6.8 ST artean truke ziklikoa, oinarrizko aldaketa

Zuahaitz hedatu bat beste batetan bihurtzeko ondorengo bi pauso hauek jarraitzearekin nahikoa da:

- ST_1 zuhaitz hedatuari korda bat gehitu, honekin oinarrizko zirkuito bat sortzen dugu.
- Sortu berri dugun oinarrizko zirkuitotik ertz bat kendu (jarri dugun korda ez).

Bi pauso horiekin haserakoaren ezberdina den zuhaitz hedatua lortzen dugu.

4.6.9 ST arteko distantzia: $d(ST_1, ST_2)$

Zuhaitz hedatu batek bestearekiko zenbat ertz ezberdin dituen esaten digu distantziak, gehienez $n-1$ izango da. Beste era batetara esateko, bi zuhaitz hedaturen arteko distantzia lehenengoan dauden baina bigarrenean ez dauden ertzen kopurua da. Distantzia hau metrika bat da eta zuhaitz hedatu batetik bestera pasatzeko egin behar den truke zikliko minimoa adierazten du.

4.6.10 ST arteko eraztun batuketa

Bi zuhaitz hedaturen arteko eraztun batuketa bi ST horietako bakar batean agertzen diren ertzek osatzen duten azpigrafoari deitzen zaio eta $ST_1 \oplus ST_2$

bezala adieraziko dugu. Bi zuhaitz hedatuen arteko distantzia azpigrafo horren ertz kopuruaren erdia da:

$$d(ST_1, ST_2) = \frac{1}{2} m_{(ST_1 \oplus ST_2)}$$

Eraztun batuketa hau bi graforen artean egin daiteke, $G_1 \oplus G_2$ bezala adieraziko da:

$$G_1 \oplus G_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 - (U_1 \cap U_2))$$

Eragiketa hau trukakorra eta elkargarria da, horregatik deitzen diogu eraztun batuketa.

4.6.11 ST arteko distantzia maximoa

G grafoaren edozein zuhaitz hedatu bikoteren artean egon daiteken distantzia maximoa grafo horren heina eta hustasunaren arteko txikiena edo gutxiago da.

$$\max d(ST_1, ST_2) \leq \min(heina, hustasuna)$$

4.6.12 Zuhaitz hedatu zentrala

Zuhaitz hedatu konkretu batek posible diren beste zuhaitz hedatuekiko duen distantzia maximoa beste edozein zuhaitz hedatuk duen distantzia maximoa baino txikiago edo berdina bada orduan ST hori zentrala dela esango dugu:

$$\max_i d(ST_0, ST_i) \leq \max_j d(ST, ST_j), \forall ST$$

Zuhaitz hedatu zentral bat baino gehiago egon daiteke

4.6.13 G grafoaren ST grafoa

Grafo berezi honek G grafoak eduki dezaken zuhaitz hedatu bakoitzeko erpin bat edukiko du, eta erpin hauen arteko ertzak distantziaren arauera egongo dira, hau da, bi ST arteko distantzia 1 bada orduan hauei dagozkien erpinen artean ertza egongo da. Beste era batetara esanda, ST_itik ST_jra truke zikliko bakar batez pasa badaiteke orduan bi horiei dagozkien erpinen artean ertza egongo da.

4.7 Oinarrizko zirkuitoa: φ

G grafoaren ST bati korda bat gehitzerakoan sortzen den zirkuitoari oinarrizko zirkuitoa deitzen zaio. Zirkuito hauek zirkuito sinpleak dira eta zuhaitz hedatu batetan sortu daitezken *oinarrizko zirkuitoen multzoa* Φ ikurraz adieraziko dugu:

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu\}$$

Multzo honetan μ elementu daude, hau da, hustasuna adina oinarrizko zirkuito daude G grafoan.

4.7.1 7. teorema

ST batekiko Φ multzoa G grafoko zirkuitoentzat oinarri bat da, hau da, G grafoko edozein zirkuito,Z, oinarrizko zirkuitoen konbinazio bezala adierazi daiteke:

$$Z = \varphi_i \oplus \varphi_j \oplus \ldots \oplus \varphi_k$$

4.7.2 Oinarrizko zirkuitoen matrizea

$$\not{\Phi}_{\mu x m} = [f_{ij}] \begin{cases} f_{ij} = 1 & a_j \text{ ertza } \varphi_i \text{ zirkuitokoa denean} \\ f_{ij} = 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

4.7.3 8. teorema

Inzidentzi matrizea, B, eta $\not{\Phi}$ matrizea, ertzak orden berdinean etiketatu ezkero mod 2 ortogonalak dira.

$$B_{n x m} \cdot (\not{\Phi}_{\mu x m})^t = O_{n x \mu}$$

4.8 Ebaketa multzoa: EM

G grafoaren ebaketa multzoa grafoa deskonektatzeko kendu behar den ertz multzo minimala da, hau da, grafotik ebaketa multzoa osatzen duten ertzak kendu ezkero grafoa bi osagaitan bihurtuko litzateke, beraz multzo horretako ertzak osagai batetik bestera garamatzatenak dira:

$$EM = \{(Y, \overline{Y}) / Y, \overline{Y} \subset X, Y \cup \overline{Y} = X, Y \cap \overline{Y} = \emptyset\}$$

Edo beste era batetara esateko:

$$EM = \{a_i / a_i = (x_i, x_j), x_i \in Y, x_j \in \overline{Y}\}$$

4.8.1 ST batekiko oinarrizko ebaketa multzoa: $\|$

ST batetatik a_i adarra kentzean STa deskonektatu egiten dugu, bertako erpinak bi osagai konektatutan banatuz. G grafoan erpin banaketa bera sortzen duen ebaketa multzoari $\|_{a_i}$ deituko diogu, ebaketa multzo horretan STtik kendutako a_i adarra egongo da eta adar horri dagokion oinarrizko ebaketa multzoa dela esango dugu.

4.8.2 Oinarrizko ebaketa multzoen multzoa: K

G grafoaren zuhaitz hedatu batekiko bere adarrei dagozkien oinarrizko ebaketa multzoen multzoa K ikurraz adieraziko dugu, bertan $n-1$ multzo egongo dira, zuhaitz hedatu batek $n-1$ ertz bait dauzka:

$$k = \{\|_{a_1}, \|_{a_2}, \dots \|_{a_{n-1}}\}$$

4.8.3 9. teorema

Edozein ebaketa multzorentzat K multzoa oinarrai bat da, hau da, edozein ebaketa multzo oinarrizko ebaketa multzoen arteko eraztun batuketa bezala adierazi daiteke.

4.8.4 Oinarrizko ebaketa multzoen matrizea:$\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = [c_{i,j}]\text{non } C_{ij} = \begin{cases} 1 & a_j \text{ ertza } \|_i \text{ oinarrizko ebaketa multzokoa bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

4.8.5 10. teorema

$\not\Phi$ matrizea eta $\mathcal{K}$ matrizea, ertzak orden berdinean jarrita mod 2 ortogonalak dira:

$$\not\Phi_{\mu\,x\,m}\cdot(\mathcal{K}_{n_1\,x\,m})^t = O_{\mu\,x\,n-1}$$

4.9 Ariketak

1. $n = 4$ eta $n = 5$ kasuentzat zuhaitz ez isomorfo guztiak marraztu

2. Zuhaitzak grafo bipartituak direla frogatu. Ba al dago bipartitu osoturik?

3. Zuhaitetako ertzak koloreztatzeko bi kolore nahikoak direla frogatu (koloreztatu ondoren ertz bakoitzak kolore ezberdinetako erpinak lotu behar dituela kontutan hartu).

4. Zintzilik 6 erpin dauzkaten zuhaitz bitar guztiak marraztu (guztiak esaterakoan isomorfo ez direnak esan nahi da).

5. Ondorengo galderei erantzun:

   - Zuhaitz batek 2 graduko 2 erpin dauzka, 3 graduko 1, eta 4 graduko 3. 1 graduko zenbat eduki behar ditu?
   - Zuhaitz batek 2 graduko n_2 erpin dauzka, 3 graduko n_3, 4 graduko n_4, $\ldots p$ graduko n_p. 1 graduko zenbat erpin dauzka?

6. Ondorengo esanak frogatu:

   - Zuhaitz bateko erpinen graduen batura $2n - 2$ da.
   - Izan bitez $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ n zenbaki positibo, gainera guztien batura $2n - 2$ dela jakinda, frogatu beti lortu daitekela zenbaki horiek adierazitako graduak dituzten erpinez osatutako zuhaitza.

7. Edozein grafo konektatuk $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$ betetzen duela frogatu.

8. Diametroa erradioaren bikoitza baino txikiagoa daukan zuhaitza marraztu. Zein baldintza betetzen dute horrelako zuhaitzek?

9. Zuhaitz baten diametroa 2 da baldin eta soilik baldin $K_{1,n-1}$ grafoa bada zuhaitz hori.

10. Izan bedi e Z zuhaitzeko erpina, erpin hori zuhaitzaren errotzat hartuta izan bitez $e_1, e_2, \ldots e_k$ e erroaren hurrengoak. Zuhaitz horretan e erpina kenduz gero geratzen diren k azpizuhaitzek (azpizuhaitz bakoitzaren erroa e_i izango da) dituzten erpin kopuruak izan bitez $s_1, s_2, \ldots s_k$. Erpin

kopuru hauen arauera e erpinaren pisua $s_1, s_2 \ldots s_k$ zenbakien arteko maximoa bezala definitzen da. Zuhaitzen *zentroidea* pisu txikiena duen erpina da (ez dauka bakarra izan beharrik).

- Zentroide bakarreko zuhaitza marraztu.
- Zuhaitzek zentroide bat ala bi dituztela frogatu, eta bi dituztenean biak auzokide direla ere frogatu.
- Baldin $s_j \leq s_1 + s_2 + \ldots + s_k - s_k$ orduan zentroide bakarrekoa dela frogatu.
- Bi zentroideko zuhaitzetan erpin kopurua zenbaki bikoitia dela frogatu, gainera zentroideen pisua erpin kopuruaren erdia dela ere frogatu.

11. Zentro eta zentroide ezberdinak dituen zuhaitza marraztu, eta gainera bai zentroa eta bai zentroidea bi erpinez osatutakoa.

12. Grafo bateko zintzilik dauden erpinak bertako zuhaitz hedatu guztietan daudela frogatu.

13. Izan bitez Z_1 eta Z_2 G grafo sinpleko bi ziklo, izan bedi a bi zikloetako ertza eta izan bedi b Z_1 ziklokoa baina ez bestekoa. Frogatu Z_3 zikloak exixtitzen duela non $Z_3 \subset (C_1 \cup C_2) - \{a\}$ eta $B \in C_3$.

14. Aurreko bera baina banaketa multzoekin.

15. Zuhaitzetan zintzilik dagoen erpin kopurua ondorengoa dela frogatu:

$$2 + \sum_{d(x) \geq 3} (d(x) - 2)$$

16. G grafoko edozein ST_1 eta ST_2 zuhaitz hedatu hartuta ST_1 zuhaitzeko edozein a adarrentzat ST_2 zuhaitzeko b adarra lor dezaket ondorengo baldintza beteko duana: $ST_1 - a + b$ G grafoko zuhaitz hedatua da.

17. Z zuhaitzko gradu maximoa $d_{Max}(G) \geq k$ bada orduan Z zuhaitzean gutxienez 1 graduko k erpin agertzen direla frogatu.

18. G grafoak 13 ertz eta 7 erpin baditu grafoko banaketa multzo ezberdin kopurua zein den esan.

19. Izan bitez p eta q zenbaki osoak eta positiboak, eta $p \leq q \leq 2p$. Frogatu G grafoa lor daitekela eta $r(G) = p$ eta $d(G) = q$.

Chapter 5

Bide motzenak

5.1 Sarrera

Gai honetan grafo beatetan erpin batetatik beste batetara joateko bide motzena aurkitzeko metodoak ikusiko ditugu, horretaz gain, lan planifikazioetan erabiltzen diren metodoak ere ikusiko ditugu, hauek bete behar ezberdinak era onenean nola konbinatu esateko erabiltzen dira, bai denborari begira eta bai kostuei begira. Komenigarria da aurreko gaietan erabili ditugun zenbait teorema gogaratzea, tartean ondorengo bi hauek:

- Grafo batetan bi erpin konektatuta badaude, alegia $x_i \in \Gamma(x_j)$, orduan x_i eta x_j erpinen artean $n-1$ edo gutxiagoko kardinalitatea duen bidea aurkitu daiteke.

- grafo baten auzokidetza matrizea $\mathcal{A}$ baldin bada, orduan:

  $$\mathcal{A}^p = \underbrace{\mathcal{A}\text{x}\mathcal{A}\ldots\mathcal{A}}_{p}$$

  Matriz horretako $a^p_{i,j}$ elementuak x_i eta x_j erpinen artean p kardinalitatea duten bide ezberdin kopurua adierazten du

5.2 Bide motzena

x_i eta x_j erpinen arteko bide motzena, pisudun grafoei dagokienez, $x_j \in \Gamma(x_i)$ izanik eta (x_k, x_l) ertzak $c_{k,l}$ pisua daukalarik, $\mu(x_i \rightarrow x_j)$ bidea izango da baldin eta bide horretako ertzen pisuen batura, $\sum\limits_{(x_i,x_j)\in\mu} c_{i,j}$, minimoa bada. Ertz bakoitzaren pisua edozein izan daiteke, baina bi erpinen artean ertzik ez balego, bi erpin horien artean ∞ pisuko ertza dagoela suposa daiteke. Gainera, pisu negatiboa daukan ziklorik ez duten grafoekin arituko gara. Planteamendu hau orokortu daiteke eta bi erpinen arteko bide motzena bilatzera mugatu beharrean erpin jakin batetatik beste erpin guztietara dauden bide motzenak bilatzen saia gaitezke, edo edozein erpin bikoteren arteko bide motzenak bilatzea ere planteatu daiteke.

5.2.1 S-oinarrizko zuhaitza

Erpin jakin batetatik, s erpinetik, beste erpin guztietara G grafoan dauden bide motzenak adierazten dituen zuhaitza s-oinarrizko zuhaitza dela esango dugu, zuhaitz hau G grafoaren zuhaitz hedatua izango da, eta bertan $s$tik beste edozein erpinetara dagoen bideak G grafoan bi erpin horien artean dagoen bide motzena adieraziko digu.

5.2.2 Moore dijkstraren algoritmoa,$c_{i,j} \geq 0$ kasu partikularra

Alagoritmo honek s erpinetik beste erpinetara dauden bide motzenak bilatzen ditu, horretarako $n-1$ iterazio egiten ditu eta hauetako bakoitzean erpin berri baterainoko bide motzena aurkitzen du. Erpinak bi multzotan banatzean ditu, S eta $\overline{S}$. Haseran S multzoan s erpina bakarrik egongo da eta iterazio bakoitzean erpin bat gehitzen dio S multzoari, multzo honetan dauden erpinak bertararte bide motzena ezaguna dutenak izango dira. Erpin bakoitzak etiketa bat edukiko du, Sko erpinek bide motzenaren luzera edukiko dute etiketatzat. Skoak ez direnak baina Skoen auzokide direnak berriz, Sko erpinaren etiketa gehi biak lotzen dituen ertzaren pisua minimo egiten duen balioa edukiko dute etiketatzat, eta azkenik, beste guztiek etiketzat ∞ edukiko dute. Bide motzenaren balioa $l^*(x_i)$ dela suposatuz:

- $x_i \in S \Rightarrow l(x_i) = l^*(x_i)$
- $x_i \in \Gamma(S) \Rightarrow l(x_i) = \min\limits_{x_k\in S \wedge x_i \in \Gamma(x_k)} [l(x_k) + c_{k,i}]$
- bestela $l(x_i) = \infty$

Ondorioz, $\overline{S}$ multzoko erpinen artean etiketa txikiena daukana S multzoan sartu daiteke, erpin horretara joateko bide motzagorik ezin bait da aurkitu. Hori egin ondoren berriz ere $\overline{S}$ multzoko erpinen etiketak kalkulatu behar dira, aldatu egin bait daitezke erpin berri hori S multzoan sartzean, baina aldatzeko arriskua daukaten bakarrak sartu berri dugun erpinaren auzokideak bakarrik dira horiengan bakarrik eduki bait dezake eragina. Berriz ere aurreko egoera berdinean aurkitzen gara eta beste erpin bat sar daiteke S multzoan. Era honetara S multzoan momentu bakoitzean etiketa txikiena daukan erpina sartzen dugu, S multzotik kanpo geratzen diren erpinen etiketak beti haundiagoak izango dira eta ertzen pisuak 0 baino haundiagoak direnez Stik kanpoko erpinetatik doan edozein bideren luzera Sko erpinetatik doanarena baino luzeagoa izango da.

Aurreko arrazoiengatik $n-1$ iteraziotan erpin guztietarainoko bide motzenak aurkitu daitezke eta Moore Dijkstraren algoritmoak hori bera egiten du. Behin etiketak kalkulatu ondoren erraza da bidea aurkitzea ondorengo aplikazio errekurtsiboa betetzen dela bait dakigu:

$$l^*(x_i) = l^*(x_k) + c_{k,i}$$

Hori erpin batek baino gehiagok beteko balu orduan bide motzena ez litzateke bakarra izango, bide motzen bat baino gehiago egongo lirateke.

Moore Dijkstraren pausoak ondorengoak dira:

1. $S = \{s\}, l(s) = 0, \forall x_i \neq s \; l(x_i) = \infty, \; p = s$
2. $\forall x_i \in \Gamma(p)/x_i \not\in S$ bere etiketa eguneratu ondorengo expresioaren baliora: $l(x_i) = \min[l(x_i), l(p) + c_{p,i}]$
3. S multzoan ez daudenen artean etiketa txikiena daukan erpina aukeratu, x_i^*
4. aurreko pausoan aukeratu dugun x_i^* erpina S multzoan sartu, hau da $S = S \cup \{x_i^*\}$ eta $p = x_i^*$ egin.
5. $|S| = n$ baldin bada orduan BUKATU, bestela 2. pausora joan.

5.2.3 Ford Bellmanen algoritmoa: Kasu orokorra

Ertzen pisua 0 baino txikiagoa izan badaiteke aurreko algoritmoak ez du balio, Stik kanpo dauden erpinetatik luzera txikitu dezaketen ertzak aurkitu bait ditzakegu eta hauek bidea moztuko bait ligukete. Kasu orokorrean

Ford Belmanen algoritmoa erabiltzen da. Honek ere aurrekoaren antzera iterazio batzuen bidez eta erpinak etiketatuz funtzionatzen du, baina oraingo honetan iterazio bakoitzean lortzen dena ez da erpin baten biderik motzena. Algoritmo honek k. iterazioan lortzen dituen etiketek esaten digutena k edo gutxiagoko kardinalitatea duten bide motzenen luzera da. Etiketa hauek ez dira betirako bezala kontsideratzen, hurrengo iterazioan erpin batetarako bide motzagoa aurkitu bait daiteke. Beraz algoritmoa bukatzean bakarrik kontsidera daiteke etiketa bat betirakoa dela. Ziklo negatiborik ez badago grafoan $n-1$ kardinalitatea edo gutxiagoko bide bat izango da bi erpinen arteko bide motzena eta bide horren luzera $n-2$ iterazioan edo lehenago estabilizatuko da. $n-2$ iterazioan etiketak ez badira estabilizatu luzera negatibodun zikloren bat dagoelako izango da eta ondorioz ez da bide motzenik egongo. Etiketak estabilizatu diren ala ez jakiteko iterazio bat gehiago egitea nahikoa da eta iterazio horretan etiketarik ez dela aldatu konprobatu beharko da.

Ford Bellmanen algoritmoak jarraitzen dituen pausoak ondorengoak dira:

1. $k = 1,\ S = \Gamma(x_1),\ \forall x_i \in \Gamma(x_1)\ l^1(x_i) = c_{1,i},\ \forall x_i \not\in \Gamma(x_1)\ l^1(x_i) = \infty$

2. Momentu honetan S multzoan dauden erpinetara dagoen bide motzenak k kardinalitatea dauka eta baldintza hori betetzen duten erpin guztiak daude S multzoan, hori jakinda ondorengoa egin behar da:

   $\forall x_i \in \Gamma(S)/x_i \neq x_1$ bere etiketa eguneratu balio bezala ondorengo expresioa emanaz: $l^{k+1}(x_i) = min[l^k(x_i), \min\limits_{x_i \in \Gamma(x_j) \wedge x_j \in S}[l^k(x_j) + c_{j,i}]]$

   S multzoan dauden erpinen auzokide ez diren erpinek ezin dute $k+1$ kardinalitatea daukan bidea eduki bide motzena bezala beraz erpin hauen etiketa ez da aldatuko eta egin behar dugun bakarra ondorengoa da: $\forall x_i \not\in \Gamma(S)\ l^k(x_i) = l^{k+1}(x_i)$

3. (a) Baldin $k \leq n-1 \wedge (\forall x_i l^k(x_i) = l^{k+1})$ orduan BUKATU, lortu ditugu x_1 erpinetik dauden bide motzenen luzerak.
   (b) Baldin $k = n-1 \wedge \exists x_i/l^k(x_i) \neq l^{k+1}(x_i)$ orduan BUKATU, luzera negatiboa daukan zikloa dago beraz ezin da bide motzenik aurkitu.
   (c) Baldin $k < n-1 \wedge \exists x_i/l^k(x_i) \neq l^{k+1}(x_i)$ orduan 4. pausora joan.

4. S multzoa eguneratu, bertan $k+1$ pausoan etiketa txikitu zaien erpinen multzoa jarri behar da, eta besterik ez. Hau da, Orain arteko bide

motzenak $k+1$ kardinalitatea badauka erpin batentzat orduan erpin hori S multzoan egongo da: $S = \{x_i / l^k(x_i) \neq l^{k+1}(x_i)\}$

5. $k = k+1$ egin eta 2. pausoara joan.

5.3 Denboraren zehar orden egokiena aurkitzeko algoritmoak: PERT-CPM

Lan bat azpilanetan banatzen denean, eta azpilan hauek sekuentzialki bete beharrik ez dagoenean baina elkarren artean dauden erlazioengatik azpilan batzuk beste batzuren ondoren bete behar badira, askotan oso zaila egiten da lanak noiz hasi eta noizko bukatu behar diren jakitea lana bere osotasunean era azkarrenean edo merkeenean bukatu ahal izateko. Horrelakoetan helburua bete dadin azpilanak zein denbora tartetan bete behar diren erabaki behar izaten da, helburua denbora muga izan daiteke edo konplexuagoa ere izan daiteke, adibidez denbora muga eta merketasuna nahas daitezke.

Horrelako lanen adibide garbia etxeen eraikuntza izan daiteke, bertan azpilan asko daude, oinarria jarri, estruktura egin, paretak jarri, arotzaren lanak, elektrizista, kristalak, ... Azpilan batzuk beste batzuren ondoren bete behar dira, baina askotan bi batera ere egin daitezke, horrelakoetan ahalik eta azkarren bukatu nahi bada era egoki bat aurkitu beharko da lan hauek betetzeko.

PERT-CPM metodoak era honetako arazoak konpontzen ditu eta horretarako grafo zuzendu bat eraikitzen du, grafo honetan erpin bakiotzak azpilan bat errepresentatzen du eta erpin batetatik beste batetara arkua badago lehenengo erpinari dagokion azpilana bigarrena hasi aurretik bete behar dela esan nahi du, gainera arku bakoitzak pisu bat darama eta pisu horrek lehenengo bete beharreko azpilanaren haseraren eta bigarrenaren haseraren artean igaro behar den atzerapen denbora minimoa adierazten du. Grafo honetan ez da zirkuitorik egongo bestela azpilan baten hasera beste bigarren baten hasera baino lehen eman behar dela baina era berean bigarren hau lehenengoa baino lehen hasi behar dela esan nahiko bait luke.

Algoritmo honek lortzen duen emaitzak lana betetzeko behar den denbora minimoa adierazten digu, horretarako grafoko bide luzeena bilatzen du hasierari dagokion erpina eta bukaera adierazten duen erpinaren artean. Bide luzeen hau bide kritikoa izango da, bertako edozein azpilanen atzerapenek lan osoaren denboran atzerapen bat suposatzen bait du.

PERT-CPM grafo baten arazoa konpontzeko bide motzena aurkitzeko erabiltzen diren algoritmoak erabili daitezke, bertan min dagoen lekuan max jartzearekin nahikoa izango litzateke, baina honetarako algoritmo azkarragoak daude eta hauek erabiltzea hobea da.

Erpin bati dagokion luzera, $l(x_j)$, ezagutzen badugu, haserako erpinarekiko noski, orduan x_j azpilana goizoenez noiz has daiteken ezagutzen dugu. Gainera x_i erpinetik x_j erpinera arkua badago $l(x_j) - l(x_i) - c_{i,j}$ expresioaren balioak x_i erpinari dagokion lana, $x_j$ri dagokionaren hasera atzeratu gabe, zenbat denboran atzera genezakeen adierazten digu.

5.4 PERT-CPM grafoan bide kritikoa bilatzeko algoritmoa

Algoritmo honek ziklorik gabeko eta zuzendua den grafo batetan haserako eta bukaerako erpinen artean dagoen bide luzeena aurkitzen du.

Grafoa ziklorik gabekoa denez erpinak arkoen ordenean etiketatu ditzakegu, hau da, (x_i, x_j) arkua badago orduan $i < j$ izanik etiketak jar ditzakegu. Horrela $x_1 = s$ haserako erpina izango da eta $x_n = t$ azken edo bukaerakoa. Era honetara etiketatutako grafoan x_j erpinaren etiketa, $l(x_j)$, s erpinetik x_j erpinera dagoen bide luzeena izango da.

$$l(x_i) = \max_{x_j \in \Gamma^{-1}(x_i)} [l(x_j) + c_{ji}]$$

Erpinak lehen esan bezala etiketatu badira espresio horren balioa aurkitzea erraza da, $l(x_1) = 0$ bait da eta besteentzat i 2tik $n$raino aldatuz bere aurreko guztiak ezagunak direnez errez kalkulatu bait daitezke.

Algoritmoa ondorengoa da:

1. Erpinak etiketatu, $(x_i, x_j) \in U$ arkoa badago orduan $i < j$ izan behar du.
2. $l(x_1) = 0$
3. $j = 2$ tik $j = n$ arte ondorengoa egin:

$$l(x_j) = \max_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} [l(x_i) + c_{ij}]$$

4. Bukatu.

5.5 Edozein erpin bikoteren arteko bide motzena, c_{ij} edozein izanik. Floyden algoritmoa.

Floyden algoritmoak erpin bikote guztien arteko bide motzenaren luzera kalkulatzen du. Horretarako pisuen matrizea erabiltzen du, eta honi "n" eraldaketa egiten dizkio. k. eraldaketan pisuen matrizeko ij elementuak x_i eta x_j erpinen arteko bide motzenaren luzera adierazten du, baina $x_1 \dots x_k$ erpinak bakarrik igaro ditzakeen bide motzenaren luzera da balio hori. n. eraldaketan, beraz, erpin guztiak igaro ditzakeen bide motzenaren luzera adieraziko du, eta hori grafoan aurkitu daitekeen bide motzenaren luzera da.

Esan dugun bezala pisuen matrizean aldaketak egiten dira, aldaketa hauetako bakoitzean egiten dena hitzez esplikatuta ondorengoa da: k. aldaketan $x_i$tik $x_j$ra joateko bi bide daudela suposatzen da, bat zuzenean eta bestea $x_i$tik $x_k$ra eta ondoren $x_k$tik $x_j$ra. Lehenengo bidea motzagoa bada matrizean dagoen balioa ez da aldatzen, baina bigarrena motzagoa bada orduan bigarrenaren luzera jartzen da. Hau erpin bikote guztientzat egiten da horrela beti bide motzenak aukeratzen joango gara. Hurrengo aldaketan $x_i$tik $x_j$ra joateko orain arteko bidea ala $x_i$tik x_{k+1}era eta hortik $x_j$ra joatea konparatzen dira, eta motzena aukeratzen da, kontutan eduki behar da bigarren bidea agian ez dela zuzenean doan bidea, hau da, agian $x_i$tik x_{k+1}era doan bidea $x_k$tik pasatzen dela, balio hori aurreko konparazioan aldatuta egon bait daiteke. Horregatik azken aldaketa egiten denean lortzen diren balioak bide motzenarenak direla esan daiteke.

Pauso bakoitzean egiten diren aldaketak hauek dira: k pausoan bagaude: $\forall i \neq k \wedge \forall j \neq k$ matrizearen c_{ij} elementuari $min(c_{ij}, (c_{ik} + c_{kj}))$ balioa asignatzen zaio. Horrela n pausoa egin ondoren x_i eta x_j erpinen artean X multzoko elementu guztiak igaro ditu eta hauen arteko bide motzena aukeratu du.

Haseran pisuen matrizearen balioak ondorengoak dira:

$$\mathcal{C} = [c_{ij}] \text{ eta hemengo elementu bakoitzaren balioa } c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{baldin } i = j \\ c(x_i, x_j) & \text{baldin } (x_i, x_j) \in U \\ \infty & \text{baldin } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Algoritmoak luzera negatiboko zikloak detektatzen ditu, horretarako nahikoa da edozein c_{ii} negatiboa izatea. Algoritmo honek edozein bi erpinen artean dagoen bide motzenaren luzera (luzera bideak igarotzen dituen arkuen pisuen batuketa bezala hartuta) ematen digu, baina horrekin bakarrik ez dakigu zein den bide motzen horrek igarotzen dituen erpinen sekuentzia, hori kalkulatzeko aurretik ikusi ditugun algoritmoetan egiten genuen bezala, algoritmo errekurtsibo bat erabil daiteke, baina beste era batetara ere egin daiteke. Horretarako ibilbide matrizea erabiltzen da, matrize hau nxn dimentsioetakoa da eta bertan ij elementuan $x_i$tik $x_j$ra joateko azkena igaro den erpina adierazten da, beraz haseran ij elementuan i adieraziko da, hori bait da x_j erpinera iritsi aurretik igaro dugun erpina. Floiden algoritmoaren arauera $x_i$tik $x_j$ra joateko zuzenean joatea baino merkeagoa (motzagoa) bada $x_i$tik $x_k$ra eta hortik $x_j$ra joatea orduan ibilbide matrizeko ij elementuan aldaketa bat egin behar da, eta bertan ibilbide berri honek $x_j$ra iritsi aurretik igarotzen duen erpina adierazi beharko da. Azken erpin hori $x_k$tik $x_j$ra joatean igarotzen den azken erpina da beraz ibilbide matrizean kj elementuan dagoen erpina ij elementuan jarri behar da. Hau da, momentu bakoitzean egin behar den aldaketa ondorengoa da:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{kj} & \text{baldin } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \theta_{ij} & \text{bestela} \end{cases}$$

Algoritmoaren bukaeran $x_i$tik $x_j$ra doan bide motzenak igarotzen dituen erpinen segida lortzeko ibilbide matrizean begiratzea nahikoa da. ibilbide horrek $x_i, x_{l_k} \ldots x_{l_2}, x_{l_1}, x_j$ erpinak igarotzen baditu tarteko erpinak honela lortu daitezke:

$$\begin{aligned} x_{l_1} &= \theta_{ij} \\ x_{l_2} &= \theta_{il_1} \\ &\vdots \\ x_{l_k} &= \theta_{il_{k-1}} \end{aligned}$$

5.6 Floiden algoritmoa

1. Pisuen matrizea eta ibilbideen matrizea hasieratu, $k = 0$
2. $k = k + 1$
3. $\forall i \neq k, \wedge \forall j \neq k$ ondorengo eragiketak egin:

$$c_{ij} = \min[c_{ij}, (c_{ik} + c_{kj})] \theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{kj} & \text{baldin } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \theta_{ij} & \text{bestela} \end{cases}$$

4.
    - Baldin edozein $c_{ii} < 0$ orduan EZ DAGO SOLUZIORIK, pisu negatibodun zikloa dagoela esan nahi du, beraz algaritmoa gelditu behar da.
    - Baldin $k = n$ eta $c_{ii} \geq 0$ orduan BUKATU, emaitza lortu dugu.
    - Baldin $k < n$ eta $C_{ii} \geq 0$ orduan 2. pausora joan.

Chapter 6

Independentzia

6.1 erpin independienteen multzoa

Grafo sinplifikatuan auzokide ez diren edozein erpin multzo erpin independienteen multzoa dela esango dugu. Hau da, S erpin multzo bat bada eta multzo horretan auzokide diren erpin bikoterik ez badago erpin horiek independienteak direla esango dugu, edo beste era batetara esanda, $S \cap \Gamma(S) = \emptyset$ baldintza betetzen duen multzoa erpin independientez osatua dago.

6.1.1 Erpin independienteen multzo maximala

Multzo independiente bati ezin badiogu erpinik gehitu multzoa independiente izaten jarraituz multzo hori maximala dela esango dugu, beraz bi baldintza bete behar ditu, independientea izan behar du eta bere supermultzoetako inork ezin du independiente izan:

$$\text{multzo independiente maximala izateko:} \begin{cases} S \subseteq X & S \cap \Gamma(S) = \emptyset \\ \forall H \supset S & H \cap \Gamma(H) \neq \emptyset \end{cases}$$

6.1.2 G grafoaren independentzia zenbakia: $\alpha(G)$

G grafoan dauden erpin independienteen multzo ezberdinen artean, hauetako haundienak duen erpin kopuruari grafoaren independentzi zenbakia deituko diogu, hau da, F erpin independienteen multzoen familia baldin bada, orduan:

$$\alpha(G) = \max_{S \in F} |S|$$

6.1.3 Multzo independiente maximoa

Multzo independiente batek $\alpha(G)$ erpin baldin badauzka orduan maximoa dela esango dugu. Baldin S multzo independientea eta $|S| = \alpha(G)$ orduan S multzo independiente maximoa da.

Multzo independiente maximala eta maximoa beraz kontzeptu ezberdinak dira, biak multzo independienteak dira, maximoa, bestea bezala, maximala da baina maximalak maximoa izan beharrik ez dauka.

6.2 G grafoko multzo independiente maximal guztiak bilatzeko algoritmoa

Algoritmo honek grafoaren erpinen arteko multzo independienteak osatzen ditu, horretarako zuhaitz bat hedatzen du eta zuhaitz horren adar bakoitzean multzoari erpin bat gehitzen dio. Zuhaitzaren erroan, hau da, haseran, multzoa hutsa dago eta multzoan sartu daitezken erpinen multzoa grafoko erpin guztiak osatzen dute. Ondoren egoera horretatik abiatuta adar ezberdinak hedatzen ditu, adar bakoitzean erpin bat gehitzen dio osatu nahi duen multzo independienteari. Honela egoera berri batetara heltzen gara, multzo independientean erpin bat gehiago daukagu eta bertan parte har dezaketen erpinen multzoa murriztu egin da, multzo independientean sartu duguna bertatik kendu behar da eta gainera horren auzokide direnak ere ezingo dute adar honetan osatzen dugun multzo independientean parte hartu. Hemendik adar berriak hedatu ditzakegu eta horrela zuhaitzean beherantz joango gara multzo independientean erpin gehiago sartu ezin dugun arte. Momentu horretan daukagun multzo independientea maximala izango da. Zuhaitzean ezin dugu gehiago joan beherantz, beraz aurreko egoerara igo behar dugu eta hor leudeken adarrak garatu beharko genituzke, hauek ere garatu ditugunean goikorantz joan beharko genuke eta berdina egin, eta horrela zuhaitzaren erroko adar guztiak garatu arte. Zuhaitzaren horri bakoitzean multzo independiente maximal bat lortuko dugu baina emaitza horietako asko errepikatuta daude.

Zuhaitzaren errotik irteten den x_i adarraren azpian x_i erpina daukaten multzo independiente guztiak agertzen dira, x_j adarraren azpian x_j erpina daukaten multzo guztiak .... Multzo independiente batek 4 erpin baldin badauzka multzo hori lau leku ezberdinetan agertuko da gutxienez, hau da, erpin bakoitzari dagokion adar bakoitzaren azpian gutxienez behin agertuko bait da. Hori kontutan edukitzen badugu algoritmo honek lan pila bat alferrik egiten duela ikusten dugu, beraz, hobekuntzak egin beharko zaizkio. Hobekuntza bat ondorengoa izan daiteke: Zuhaitzaren "e" erpinean multzo independienteari x_i erpina gehitzen badiogu adar horren azpian orain arteko multzoa eta x_i daukaten multzo independiente maximal guztiak lortuko ditugu, beraz, "e" erpinean hedatu behar diren beste adarren azpian x_i erpinari dagozkion adarrak ez ditugu hedatu behar (x_i erpina daukaten emaitzak lortuta bait dauzkagu). Era honetara alferrikako lanik ez dugu egingo. Baina horretaz gain emaitza berririk emango ez digun adarrak hedatzea ere alferrikakoa denez ahalik eta azkarren erabaki behar da adar batek ez duela emaitza berririk emango. Kontutan eduki behar da emaitza bat multzo independientean erpin gehiago sartu ezin denean lortzen dela, beraz $x_i$ri dagokion adarra hedatu ondoren zuhaitzaren "e" erpinetik hedatu daitezkeen adar guztietan lortu daitezkeen multzoetan x_i erpinak egon behar badu orduan adar guzti horiek garatzea alferrikakoa da beraz ez dira garatu behar. x_i erpina multzo independiente guztietan beharrezkoa den ala ez jakiteko zerri begiratu behar zaion jakin behar da beraz. Guk badakigu multzo batetan erpin bat sartzean bere auzokideak ezin direla sartu, ondorioz, oraindik sartu ez dugun erpin konkretu bat, sartzeko falta diren erpinen auzokide ez bada, nahiz eta horietako edozein multzo independientean sartu, erpin horiek ez dute galeraziko beste erpin konkretu horren sarrera, beraz emaitza lortzeko erpin hori sartu egin beharko da. Hau jakinda, erraza da erabakitzea noiz agertuko den erpin bat zuhaitzaren adar baten azpiko emaitza guztietan (erpin hori, sartzeko falta diren erpinen auzokide ez denean) beraz egoera hori ematen denean eta erpin hori daukaten emaitza guztiak lortuta baldin badauzkagu adar horiek garatu gabe uztean algoritmoa azkartuko dugu.

Hor azaldutakoa ulertzeko adibide erraz bat ondorengoa da: Har dezagun erpin isolatu bat daukan grafo bat, eta has gaitezen multzo independiente maximal guztiak bilatzen. Lehenengo garatzen dugun adarra erpin isolatuari dagokion adarra baldin bada adar horren azpian erpin isolatu hori daukaten multzo independiente maximal guztiak lortuko ditugu. Hauek lortu ondoren beste adarrak begiratu beharko genituzke, baina oraindik hedatu ez ditugun erpinek ezin dute eragotzi erpin isolatu horren sarrera multzo independientean, beraz, erpin isolatua multzo independientean sartu beharko genuke. Baina lehenengo hedatu dugun adarraren azpian erpin isolatua daukaten multzo independiente guztiak lortu ditugu, beraz, alferrikakoa da beste adarretan zein emaitza lortuko genituzken begiratzea.

Aurreko guzti hori kontutan hartzen badugu, zuhaitzaren erpin bakoitzean eduki behar dugun informazioa ondorengoa izangoa da:

1. Zuhaitzaren zein mailatan gauden jakiteko K aldagaia erabiliko dugu, haseran $K = 0$ izango da.
2. Momentu bakoitzean multzo independientean zein erpin sartu ditugun jakin behar da, multzo honi S deituko diogu eta zuhaitzean barrenerantz joan ahala multzo horretan erpinak sartzen joango gara.
3. Sartuta dauzkagun erpinak zein diren jakiteaz gain multzo horretan zein sar ditzakegun ere jakin behar da, hau da, S multzoko erpinen auzokide ez diren erpinak zein diren ere jakin behar dugu. Baina erpin hauek bi multzotan banatuko ditugu:
    - Q^-: Zuhaitzaren erpin konkretu batetan beherantz hedatu ditugun adarrak multzo honetan egongo dira.
    - Q^+: Oraindik hedatu ez ditugun adarrak osatzen dute multzo hau.

Zuhaitzaren errotik hasiko da algoritmoa, haseran $K = 0$ izango da, erroari dagokion S multzoa hutsa egongo da, oraindik ez bait dugu erpinik sartu, Q^- multzoa ere hutsa izango da haseran eta Q^+ grafoaren erpin guztiek osatuko dute, oraindik zuhaitzaren adarrik ez bait dugu hedatu. Egoera honetatik hasita Q^+ multzoko elementu bat aukeratuko dugu eta horri dagokion adarra hedatuko dugu, beraz, lehenengo mailara pasako gara, hemen S multzoan elementu bat edukiko dugu, aukeratu berri dugun erpina, eta ondorioz multzoan sar daitezken erpinak gutxitu egingo dira, Sn sartu dugunaren auzokideek ezin bait dute sartu multzo independientean. Hauek maila honetako Q^- eta Q^+ multzoetan ez dira agertuko. Zuhaitzaren erpin honetatik beherantz hedatuko ditugu adarrak, hedapen hauek S multzoan erpin gehiago sartu ezin denean bukatuko dira eta ondorioz zuhaitzean gorantz joan beharko dugu hedatu gabe utzi ditugun adarrak hedatzera. Horrela zuhaitzaren errora iritsiko gara, momentu horretan haseran aukeratu dugun erpinari dagokion hedapen guztia bukatu dugula esan nahi du, beraz, erpin hori Q^- multzoan sartu behar da eta Q^+etik kendu. Hau egin ondoren beste erpin bat aukeratu behar da eta horri dagokion adarra garatu beharko dugu aurrekoarekin egin dugun modura.

Ikus daitekeenez zuhaitzean mogituko gara beti, eta hor bi mogimendu mota egingo ditugu, adarretan barrena (erpin bat multzo independientean sartzen dugunean egiten da hau) eta zuhaitzean gorantz (erpin gehiago sartu ezin denean edo sartzea alferrikakoa denean zuhaitzean gorantz egin behar da hedatu gabe utzi ditugun adarrak hedatzera). Zuhaitzaren erpin batetara iristen garenean hor zein mogimendu egin behar den erabaki beharko dugu, horretarako ondorengoa begiratu behar da:

1. S multzoan multzo independiente maximala baldin badaukagu emaitza bat dela adierazi behar da eta ondoren gorantz joan behar dugu, ea goiko mailako erpinean zer egin behar den ikustera. S multzoa maximala izateko multzo horretan erpin gehiago ezingo da sartu, eta hori Q^- eta Q^+ multzoek adierazten dute, hau da, biak hutsak badira orduan S multzoa emaitza bat izango da.

2. Aurreko kasuan ez bagaude zuhaitzaren barnean gabiltzala esan nahi du eta hor zer egin behar dugun begiratu beharko da: gorantz joan ala hortik beherantz adar gehiago hedatu behar den begiratu. Zuhaitzaren erpin horretan hedatu daitezkeen adar guztiak hedatu baditugu gorantz joan behar da, hori gertatzeko Q^+ multzoak hutsa egon behar du, hau da, orain arteko S multzoan sartu zitezkeen erpin guztiei dagozkien adarrak hedatu ditugunez erpin hauek Q^- multzoan egongo dira.

3. Bestalde, gorantz joateko beste arrazoi bat ere badago, hau da, zuhaitzaren egoera honetatik hedatu daitezkeen adarrek dagoenekoz lortuta dauzkagun emaitzak bakarrik emango badizkigu ez du pena merezi adar horiek hedatzea, beraz gorantz joan beharko dugu. Hori gertazeko, aurretik adierazi diren arrazoiengatik, Q^- multzoko elementuak begiratu behar ditugu. Hor dagoen erpinen batek Q^+ multzoan auzokiderik ez badauka egoera berezi horretan gaudela esan nahi du.

4. Eta azkenik, aurreko kasuetan ez bagaude beherantz hedatu behar diren adarrak dauzkagula esan nahi du. Kasu honetan Q^+ multzoko erpin bat aukeratu behar da eta horri dagokion adarra hedatu beharko da.

Gure algoritmoak gauza guzti horiek kontutan hartzen baditu alferrikako lanik ez du egingo, ez bait du emaitza berririk sortzen ez duen adarrik hedatuko. Hala ere zein adar hedatu behar den erabakitzeko orduan ez dugu esan zein diren jarraitu behar dituen helburuak. Aukera egiterakoan, saia gintezke ahalik eta azkarren buka araziko digun aukera egiten, hau da, ahalik eta adar gutxien garatu araziko diguten aukerak egiten. Horretarako aukerak nola egin behar diren jakin behar dugu. Aurretik azaldu dugun bezala, erpin bati dagokion adarra hedatu badugu eta hedatzeko falta zaizkigun erpinen auzokide ez bada, orduan falta diren adarrak hedatzea alferrikakoa dela badakigu, ondorioz egoera horretara bideratu dezakegu algoritmoa, hori egiteko auzokide gutxi dituen erpin bat aukeratu beharko genuke lehenengo, ondoren, horri dagokion adarra hedatu, gero bere auzokideei dagozkien adarrak headatu eta hau egin ondoren haseran aukeratu dugun erpina hedatzeko falta diren erpinen auzokide ez dela konturatuko ginateke, beraz falta diren adar guztien azpian leudeken multzo maximal guztiek erpin konkretu hori eduki beharko lukete, baina multzo guzti horiek erpin konkretu horri dagokion adarraren azpian lortu ditugunez ez dago adar gehiago hedatu beharrik.

Orain arte azaldutakoarekin multzo independiente maximal guztiak lortzeko algaritmoa egitea erraza da, eta ondorengoa izan daiteke:

6.2.1 Multzo independiente maximal guztiak lortzeko algaritmoa

1. $S_0 = \emptyset, Q_0^- = \emptyset, Q_0^+ = X, K = 0$
2.
   - Lortu $x_k^* \in Q_k^- \cup Q_k^+ / |\Gamma(x_k^*) \cap Q_k^+|$ minimoa duena.
   - x_k aukeratu, horretarako:

     $$x_k = \begin{cases} x_k^* & \text{baldin } x_k^* \in Q_k^+ \\ x_k \in \Gamma(x_k^*) \cap Q_k^+ & \text{baldin } x_k^* \notin Q_k^+ \end{cases}$$

   - $S_{k+1} = S_k \cup \{x_k\}$
   - $Q_{k+1}^+ = Q_k^+ - \Gamma(x_k) - \{x_k\}$
   - $Q_{k+1}^- = Q_k^- - \Gamma(x_k)$
   - $k = k + 1$
3. Baldin $\exists x \in Q_k^- / \Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset$ orduan 5. pausoara joan.
4.
   - Baldin $Q_k^+ = Q_k^- = \emptyset$ orduan S_k multzo maximal independiente berria da, emaitza bezala idatzi eta 5. pausora joan.
   - Bestela 2. pausora joan.
5.
   - $k = k - 1$

- $Q_k^+ = Q_k^+ - \{x_k\}$
- $Q_k^- = Q_k^- \cup \{x_k\}$
- Baldin $K = 0$ eta $\exists x \in Q_0^- / \Gamma(x) \cap Q_0^+ = \emptyset$ orduan GELDITU, algoritmoa bukatu da.
- 3. pausora joan.

6.3 erpin multzo dominantea

D multzoa dominantea dela esango dugu baldin eta $\forall x_i \notin D$ erpin horretara garamatzan arkurik badago D multzoko erpin batetatik. Ondorioz grafoko erpin guztiak D multzokoak edo hauen auzokide izan behar dute, hau da, $D \cup \Gamma(D) = X$ bete behar da.

6.3.1 Multzo dominante minimala

Minimala izan dadin multzo dominanteko erpin guztiak beharrezkoak izan behar dute, hau da, multzo horretatik erpin bat kendu ezkero multzoak dominante izateari utziko lioke., beraz bi baldintza bete behar ditu:

$$\begin{cases} D \subseteq X & D \cup \Gamma(D) = X \\ \forall H \subset D & H \cup \Gamma(H) \neq X \end{cases}$$

6.3.2 Gren dominazio zenbakia: $\beta(G)$

Grafoaren dominazio zenbakia erpin gutxien dituen multzo dominantearen erpin kopuruari deituko diogu. Multzo dominante guztien multzoari $\mathcal{D}$ deitzen badiogu orduan

$$\beta(G) = \min_{D \in \mathcal{D}} |D|$$

6.3.3 multzo dominante minimoa

Grafoaren dominazio zenbakia adina erpin dituen multzo dominanteari deituko diogu, hau da, baldin $|D| = \beta(G)$ orduan D minimoa izango da.

6.4 1. teorema

Multzo independiente bat hartuta, maximala da baldin eta soilik baldin dominantea bada.

Ondorioz:

- $\alpha(G) \geq \beta(G)$
- Teorema honek ez du esaten multzo dominantea independientea denik.

6.5 Multzo dominante minimal guztiak bilatzako era analitikoa

Multzo dominante batek erpin guztiak dominatu behar ditu, horretarako, hau da erpin bat dominatua izateko bi aukera dauzkagu, erpin bera multzo dominantekoa izatea ala erpin horren auzokide bat multzo dominantekoa izatea. Demagun x_j erpinaren auzokideek $\{x_j^k / k = 1 \ldots d_j\}$ multzoa osatzen dutela, orduan erpin bakoitzari balio boolear bat ematen badiogu, multzo dominantekoei 1 balioa eta besteei 0 balioa, x_j erpina dominatua izan dadin ondorengo espresio boolearrak 1 balioa eduki behar du:

$$x_j + x_j^1 + \ldots + x_j^{d_j}$$

Multzo dominanteek espresio hori egiaztatuko dute, bai erpin horrentzat eta bai beste erpin guztientzat, beraz multzo bat dominantea izan dadin ondorengo espresioa egiaztatu beharko du:

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j + x_j^1 + \ldots + x_j^{d_j})$$

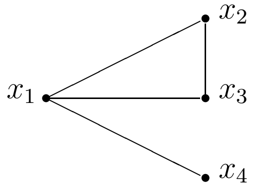
Espresio horien biderkaketak egitean ondorengo sinplifikazioak egin daitezke:

- $a.a = a$
- $a + a = a$
- $a + ab = a$ edo $a.(a + b) = a$

Horrela, ahalik eta gehien sinplifikatuz, goiko espresioa egiazta dezaketen multzo minimalak lortu daitezke.

6.6 klikea

K_i grafoaren isomorfoa den azpigrafo partzial maximalari klikea deituko diogu. Adibidez, ondorengo grafoa kontutan hartzen badugu:



Grafo honetan x_1, x_2, x_3 erpinen artean posible diren ertz guztiak daude, beraz, K_3 grafoaren isomorfoa da hiru horiek osatzen duten azpigrafo partziala, gainera baldintza hori betetzen duen azpigrafo partzial haundiena da, hau da, beste erpinen bat gehitu ezkero ez litzateke K_4ren isomorfo izango, ondorioz azpigrafo partzial hori klikea dela esango dugu. Goiko grafo horretan beste klike bat ere badago eta hau x_1, x_4 erpinek osatzen dute. Bi erpin horiek dauzkan azpigrafo partziala K_2ren isomorfoa da, eta bikote horri ezin diogu hirugarren erpinik gehitu K_3ren isomrfoa den azpigrafoa lortuaz.

6.6.1 2. teorema

S erpin multzoa multzo independiente maximala da baldin eta soilik baldin S G grafoaren osagarriaren, $\overline{G}$ren, klikea bada.

Ondorioz klikeen eta multzo independiente maximalen arteko parekotasunaz hitzegin genezake, eta goiko grafoan dauden bi klikeak grafo horren osagarriaren multzo independiente maximalak izango dira.

6.7 Multzo independiente maximalak bilatzeko metodo analitikoa

Aritmetika boolearra erabiliaz multzo independiente maximalen osagarriak bilatu ditzakegu, eta behin hauek ezagututa, multzo independiente maximalak ezagutzea oso erraza da. S multzo independiente maximala bada, bere osagarria $X - S$ izango da.

Bi erpin auzokide badira, ez da posible bi erpin horiek multzo independiente maximal batetan egotea, gehienez bietatik bat bakarra egongo da multzo independiente maximalean, baina gerta liteke bietako inor ere ez egotea, ondorioz, biak edo bietako bat multzo independiente maximalaren osagarrian egongo da. Hori edozein ertzekin gertatuko da, hau da, (x_i, x_j) ertza grafokoa bada, orduan, x_i edo x_j edo biak multzo independiente maximalaren osagarrikoak izango dira. Erpin bakoitzari 1 edo 0 balioa emango bagenio, 1 multzo independientearen osagarrikoa baldin bada, eta 0 ez bada, orduan ertz bakoitzak, lojika boolearra jarraituz, $x_i + x_j = 1$ bete beharko du, eta orokortuz:

$$\prod_{(x_i,x_j)\in U} (x_i + x_j)$$

Expresio hori egiaztatu beharko du multzo independiente ororen osagarriak, beraz, egiaztatzen duten multzo minimoak bilatu beharko ditugu eta horrela, bere osagarria multzo independiente maximala izango da.