Kontaketa. Permutazioak eta konbinazioak

October 8, 2008

Contents

0.1 Kontaketaren printzipio nagusiak 1
0.1.1 Batura eta biderkaduraren erregelak 1
0.2 Permutazioak 2
0.3 Konbinazioak 5
0.4 Teorema binomiala 9
0.4.1 Froga 9
0.5 Errepikapendun konbinazioak: Banaketak 10

0.1 Kontaketaren printzipio nagusiak

0.1.1 Batura eta biderkaduraren erregelak

Bi erregela hauek oso sinpleak diruditen arren kontaketa kasu konplikatu asko ebazteko oso erabilgarriak dira.

- Baturaren erregela: Eginkizun bat m eratara bete badaiteke eta beste eginkizun bat n eratara bete baditeke eta biak batera bete ezin badaitezke, eginkizun hauetako bat betetzeko $m + n$ era daude.

- Biderkaduraren erregela: Betebehar bat bi etapatan zati badaiteke eta lehenengorako m era badaude eta bigarrenerako n, eginbeharra mxn eratara bete daiteke.

Bi arau hauek erabiltzeko adibide asko dago, hemen batzuk azalduko ditugu:

1. Liburutegian programatzen ikasteko liburu mota ezberdin asko dago, horietako 7 Paskalen oinarritzen dira, 4 ADAn, 3 C++ lengoaian eta 2 Delphin. Programatzen ikasi nahi duen ikasleak zenbat aukera dauzka?

$$7 + 4 + 3 + 2$$

2. Kotxeen matrikulek bi karaktere eta lau digitu dauzkate. Zenbat matrikula lor daitezke horrela? eta errepikapenik onartuko ez bagenu?

   - Lehenengo kasuan:

   $$26x26x10x10x10x10$$

   - Errepikapenik gabe:

   $$26x25x10x9x8x7$$

3. Programazio lengoaien haserako garaietan bi aldagai-izen mota onartzen zituen lengoaia sortu zen, lehenengo motakoak karaktere bakarrez osatutakoak ziren eta bigarren motakoak karaktere bat eta jarraian digitu bat. Zenbait aldagai onar zitzakeen gehienez lengoaia hark?

   $$26 + 26x10$$

0.2 Permutazioak

Biderkaduraren erregela erabiliz objektuak zenbat eratan koka daitezkeen konta dezakegu. Kokatze ordenak garrantzia izango du eta ondorioz orden jakin batean dagoena ordenatuta dagoela esango dugu. Kontaketa mota honetako adibide asko dago:

- Hamar ikasleren artean lau zerrenda batean ordenatu behar ditugu. Zenbat zerrenda egin daitezke? (ez ahaztu zerrendako ordenak garrantzia daukala, pentsa ezazu pisuaren arabera ordenatu nahi ditugula).

$$10x9x8x7$$

n objekturen bilduma emanik, objektu hauen edozein ordenaziori permutazioa deituko diogu. Oro har, n objekturekin, horietako $r \leq n$ ordenatu ditzakegu, eta hauetako bakoitzari r neurriko permutazioa deituko diogu. r neurriko permutazio-kopurua ondorengoa da:

$$P(n, r) = nx(n-1)x(n-2)x \dots x(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kontuan eduki behar da permutazioez hitzegitean objektuak ez direla errepikatzen, eta ordena kontuan hartzen dela. Objektuen errepikapenak onartuko bagenitu r aukera egitea izango litzateke, eta aukera bakoitzean n posibilitate geneuzkake, beraz, r elementu errepikatzeko aukerarekin n^r eratan ordenatu ditzakegu. Permutazioen adibide bezala ondorengoak izan daitezke:

- Edurnezuriren zazpi ipotxak gauero lotara joan aurretik musu bana ematen diote beren bihotzeko kuttunari. Gauero istilu bera izaten dute, lehendabizi nork eman erabakitzeko beti burrukan bukatzen dute, bigarrenarentzat ere berdin ... Azkenean ordenazio guztiak egitea eta gauero horietako bati jarraitzea erabaki dute. Zenbat gau igaroko dira berriz burrukan hasteko?

$$7x6x5x4x3x2x1 = 7!$$

- Baina Edurnezuri nazkatu egin da eta gauero musu hiruri ematea erabaki du. Zenbat permutazio dago hirunaka ordenatuz?

$$7x6x5 = \frac{7!}{(7-3)!}$$

- Gauero 10 musu ematea erabakiko balu, egoera aldatu egiten da, errepikapenak onartu bahar baitira. kasu horretan zenbat ordenazio ezberdin leudeke?

$$7x7x7x7x7x7x7x7x7x7 = 7^{10}$$

Zenbait kasutan objektu motekin jokatu behar izaten dugu, mota bereko objektuak elkarren artean bereiz ezinak izaten dira, baina mota batetik besterako aldea nabarmena da. Kasu horretan objektuak ordenatzean mota bakoitzeko objektu guztiak berdinak direnez horietako edozein har dezakegu baina beste motetakoak ezingo ditugu hartu. Horren adibide bezala ondorengoa izan daiteke:

- Marisko platerkada batean hiru otarrainska, bi nekora bi txangurro eta buia bat dauzkagu. Hauek jateko orduan ordenaren arabera zenbat era dagoen jakin nahi dugu, baina, jakina, nekora hartzerakoan ez du garrantzirik bitatik zein hartzen den.

$$\frac{8!}{3!x2!x2!}$$

Orokorrean, n objekturekin, n_1 lehenengo motakoak izanik, n_2 bigarrenekoak, $\ldots n_r$ r. motakoak, objektu horiek ordenatzeko $\frac{n!}{n_1!n_1!...n_r!}$ era izango dugu.

Horren adibide bezala ondorengoak dauzkagu:

- BURUGOGOR hitzaren hizkiekikn zenbat ordenazio lor daitezke?

$$\frac{9!}{2!x2!x2!x2!x1!}$$

- Eta zenbat izango dira OO hizkiak batera dauzkatenak?

$$\frac{8!}{2!x2!x2!x1!x1!}$$

  Kasu horretan bi hizki horiek bakar bat bezala hartu behar baitira.

- Bi dimentsioko planoan (2,1) puntutik (4,7) puntura joateko bide asko dago. Baina demagun gure ibilbidean beti puntu baten eskubikora ala gainekora joateko aukerak besterik ez ditugula, hau da, momentu bakoitzeko aukera G(ora) ala E(skubira) izango da. Kasu horretan zenbat bide egin daitezke puntu batetik besteraino?

$$\frac{8!}{6!x2!}$$

  Batetik bestera joateko bide guztiek bi aldiz E egin behar dute eta 6 aldiz G.

- Sei pertsona mahai biribil baten inguruan ordenatu behar dira, baina ordenatzerakoan posizio erlatiboak dira kontuan eduki beharreko bakarrak, hau da, ordena jakin bat mahaiaren inguruan biratzean ordena ez dela ladatzen suposatzen da, ondorioz, ABCDEF ordenazioa BCDEFA ordenazioaren berdina izango da. Zenbat eratara eseri daitezke?

$$\frac{6!}{6}$$

  Ordenazio bakoitzari beste bost berdin dagozkio, beraz seiko multzotan bana ditzakegu permutazio guztiak.

- Hori bera beste era batera ere egin daiteke. Biraketak onartzen ez direnez mahaikide baten kokapena beti bera dela suposa dezakegu, eta ondorioz beste bostak mahaiaren inguruan kokatzeko era kopurua izango da guk bilatzen dugun zenbakia, hau da, bost objekturen permutazioak: 5!.

- Sei pertsona horietako hiru europarrak direla suposa dezagun eta beste hirurak asiarrak. Txandakatuz ordenatu nahi baditugu zenbat eratara egin genezake?

  $$3x2x2x1x1$$

  Pertsonetako bat eseri ondoren bere eskubikoa hirutik bat izan daiteke, horren eskubikoa bitik bat, horren eskubikoa bitik bat , beste honen eskubikoarentzat aukera bakarra dago eta horren eta lehenengoaren arterako ere bakarra geratzen da.

0.3 Konbinazioak

Konbinazioa ordena kontuan hartzen ez denean izango da, hau da, elementu multzo batetik azpi multzo bat aukeratzean azpimultzo horri konbinazioa deituko diogu. Multzoetaz hitzegiten dugunez ordenak ez du garrantzirik, garrantzia duen bakarra bertakoa izatea da.

Horrela, kartetan ari garenean urrezko erregeak, zaldiak txotak eta batak konbinazio bat osatzen dute, hau lortzeko ordena edozein dela ere. Ordenaren arabera 4! era daude konbinazio hau lortzeko. Eta beste edozein konbinazio lortzeko ere, lau kartetakoa bada behintzat, beti 4! era egongo da. Ondorioz, konbinazio-kopurua $= \frac{\text{permutazio-kopurua}}{\text{konbinazio bakoitzeko dagoen permutazio-kopurua}}$

Museko kasuan: $\frac{10x9x8x7}{4x3x2x1}$.

Orokorrean, n objekturekin r objektutako konbinazio bakoitza lortzeko $r!$ permutazio dago, eta ondorioz r neurriko konbinazioen kopurua ondorengoa izango da:

$$K(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

Konbinazioen adibide bezala ondorengoak izan daitezke:

- Azterketa bat 10 galderak osatzen dute baina horietatik zazpi erantzun behar dira. Azterketa egiteko zenbat era dago?

$$K(10,7) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{10x9x8}{3x2x1} = 120$$

- Azterketa horretan lehenengo bostetatik hiru erantzun beharko bagenitu eta beste bostetatik lau, zenbat era leudeke?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5!}{4!} x \frac{5!}{3!x2!} = 50$$

- Lehenengo bostetatik gutxienez hiru erantzun beharko bagenitu? Kasu horretan hiru aukera dauzkagu, eta erantzun zuzena hiru aukeren batuketa izango da:

  1. Lehenengo bostetatik hiru eta hurrengo bostetatik lau. Beraz 50 konbinazio.
  2. Lehenengo bostetatik lau eta hurrengokotatik hiru. Berriz ere 50 era.
  3. Lehenengo bostak eta besteetatik bi.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5!}{5!} x \frac{5!}{2!x3!} = 10$$

  Guztira 110 konbinazio dago beraz 110 eratara egin ahal izango dugu azterketa.

- Eskola batek boleibol-taldea osatu nahi du eta horretarako bi geletako aurren artetik bederatzi aukeratu behar dituzte. Gela batean 28 ikasle dago eta bestean 25. Zenbat eratara osatu dezakete taldea?

$$\begin{pmatrix} 53 \\ 9 \end{pmatrix} = 4.431.613.550$$

- Gela bateko bi eta besteko bat oso onak dira eta taldean sartzea erabaki dute, hiru hauek taldean sartzen badituzte zenbat eratara osatu daiteke?

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 6 \end{pmatrix} = 15.890.700$$

- lehenengo gelako lau eta bigarreneko bostek osatu behar badute taldea?

$$\begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = 1.087.836.750$$

- 36 lagunekin lau talde egin nahi dira, bakoitza 9 lagunekoa, eta lagun bakoitza talde bakarrekoa izanik. Zenbat era dago?

$$\begin{pmatrix} 36 \\ 9 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{36x35\ldots x28}{9!} x \frac{27x26\ldots x19}{9!} x \frac{18x17\ldots x10}{9!} x \frac{9x8\ldots x1}{9!} = \frac{36!}{(9!)^4}$$

- Adibide hau beste era batera ere har zitekeen. Pentsa genezake 36 lagunak lau talde osatzen dituztela eta hauek 36ko zerrenda batean jarri behar ditugula. Zenbat zerrenda lor ditzakegu?

$$n = 36, n_1 = 9, n_2 = 9, n_3 = 9, n_4 = 9$$

$$\frac{36!}{9!x9!x9!x9!}$$

- BABARRUNA hitzaren letrekin sortu daitekeen hitz-kopurua $\frac{9!}{2!x3!x2!x1!x1!}$ Hitz hauetatik zenbatek ez dituzte A letrak elkarren ondoan?

  Arazo hau ebazteko A letrak alde batera laga eta beste letrekin zenbat ordenazio dagoen kalkula dezakegu: $\frac{6!}{2!x2!x1!x1!} = 180$ Ondoren hitz hauei hiru A gehitu diezaiekegu, baina A bakoitza besteengandik aparte. Horretarako 7 kokagune dauzkagu eta horietatik hiru aukeratu behar dira, beraz $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ konbinazio erabil ditzakegu hitz bakoitzeko. Guztira 180 x 35 (biderkadura erregela).

- Kartekin jokatu dezagun. 5 karta hartuko bagenitu zenbat aukera dago urrezkorik ez edukitzeko?

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{30x29x28x27x26}{5!}$$

- Eta gutxienez urre bat edukitzeko?

$$\binom{40}{5} - \binom{30}{5}$$

- Azken ariketa hori beste era batera egin daitekela ere pentsa daiteke, adibidez lehenengoa urrea aukeratu eta besteak edozein izan daitezke, horrela gutxienez urrezko bat edukiko dugu. Horrela izango balitz konbinazio kopurua ondorengoa litzateke:

$$\binom{10}{1} x \binom{39}{4}$$

  Baina zenbaki hori aurreko zenbakiarekin konparatzean handiagoa dela ikus dezakegu. horren arrazoia zenbait konbinazio behin baino gehiagotan kontatu izana da, adibidez (1U), (3U 4E 3B 7B) aukera kontatu dugu, baina era berean (3U), (4E 1U 3B 7B) ere kontatu egin dugu, baina bi horiek konbinazio berari dagozkio. Kontuz ibili behar da.

- Gutxienez bi urrezko dauzkaten zenbat konbinazio dago?

  Hori ebazteko kartak bi multzotan banatuko ditugu, alde batetik urrezkoak eta bestetik besteak. Gutxienez bi urrezko behar ditugunez aukerak lau eratakoak dira:

  1. Bi urre dauzkatenak (bestelako hiru):

  $$\binom{10}{2} x \binom{30}{3}$$

  2. Hiru urre dauzkatenak (bestelako bi):

  $$\binom{10}{3} x \binom{30}{2}$$

  3. lau urre dauzkatenak (bestelako bat):

  $$\binom{10}{4} x \binom{30}{1}$$

4. Bost urre dauzkatenak (bestelakorik ez):

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} x1$$

Ondorioz, konbinazio guztiak baturaren erregelaz lor ditzakegu:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} x1$$

0.4 Teorema binomiala

n zenbaki osoa eta positiboa izanik:

$$(x+y)^n =$$

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n y^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} y^1 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} x^1 y^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^0 y^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k$$

Gainera badakigu ondorengoa:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

Horretaz gain:

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$$

0.4.1 Froga

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

Biderkaketaren banakortasuna erabiliz 2^n gai ateratzen dira. Gai bakoitzean n aldagai egongo dira eta gai bakoitza besteengandik bereiz genezake faktore bakoitzetik aukeratu dugun aldagaiaren arabera. Hala ere gai bakoitza bere baitan hartuz gero x eta y arteko konbinazioa bati dagokio, trukagarritasuna erabiliz ordena daiteke eta $x^k y^{n-k}$ bezala jarri ahal izango dugu. Gai asko konbinazio berari dagozkio, eta jakin beharrekoa konbinazio bakoitzari dagokion gai kopurua da. Azken finean bi multzo dauzkagu, alde batetik x aldagaiena eta bestetik y aldagaiena, eta k finkatuz n elementuz osatutako ordenazio kopurua kalkulatu behar da. Hau da, x aldagaien multzoan k elementu daude eta y aldagaienean $n-k$, eta hauekin $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ordenazio lor daitezke. Ordenazio hauek guztiak bata bestearengandik bereiz daitezke eta bakoitza behin agertzen da binomioaren garapeari dagozkion gaien artean.

Guzti horren ondorioz $x^k y^{n-k}$ konbinazioari dagozkion $\binom{n}{k}$ gai agertzen da binomioaren garapenean.

0.5 Errepikapendun konbinazioak: Banaketak

Demagun n motatako objektuak dauzkagula, guk r objektu nahi ditugu, baina objektu horiek errepikatu daitezke, hau da, mota bereko objektuak har ditzakegu. Kalkulatu behar dena r objektuak hartzeko era kopurua da. Hartzeko era honela idatz dezakegu:

$$n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_n^{k_n}$$

eta bertan:

$$n_i^{k_j} \text{ terminoak } n_i \text{ multzoko } k_j \text{ elementu ditugula adierazten du}$$

gainera:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$$

Ondorioz, n batugai erabiliz r zenbakia lortzeko era kopurua da bilatzen duguna (batugaiak 0 izan daitezke).

Guzti hau beste era batera ikus dezakegu, hau da, r objektuak multzotan banatu behar ditugu, objektu bakoitzeko O ikurra erabiliko dugu eta mota bateko objektuak bukatzean / ikurra jarriko dugu. Horrela adieraziz lehenengo / aurkitu bitartean dauden O kopuruak n_1 motako objektu kopurua adieraziko du, lehenego / eta bigarrenaren artean dagoen O kopuruak n_2 motako objektu kopurua eta abar. n mota dauzkagunez $n-1$ banatzaile edo / ikur jarriko ditugu, eta bi banatzaile (/) jarraian agertuko balira mugatzen duten motako objekturik ez dugula hartu adieraziko luke. Objektuak banatzeko era bakoitza adierazteko $r+n-1$ ikur behar ditugu eta hauen permutazio bakoitzak banaketa bat adierazten du. Beraz banaketa-kopurua ezagutu nahi badugu ikur horien permutazio-kopurua jakin behar dugu:

$$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$$

Adibide asko dago banaketen inguruan:

- Taberna batean lau otarteko mota eskeintzen dituzte, gazta, solomoa, txistorra eta urdaiazpikoa. zazpi lagunek otarteko bana eskatu nahi dute, zenbat eskari egin ditzakete?

$$\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

- Gozotegi batean 20 pastel mota dago, dozena bat aukeratzeko zenbat era dago?

$$\frac{31!}{12!19!} = \binom{31}{12} = \binom{31}{19}$$

- Zazpi bost-duroko lau umeren artean zenbat eratara bana daiteke?

$$\frac{10!}{7!3!}$$

- Ondorengo ekuazioaren osoko soluzioen kopurua kalkulatu:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

  Hau aurrekoaren baliokidea da.

- Lau umeren artean 7 sagar eta 6 udare banatu behar dira, baina ume bakoitzak guxienez sagar bat eduki behar du. Zenbat eratan bana ditzakegu? Ume bakoitzak sagar bana hartu ondoren 3 sagar lauren artean banatu behar ditugu, eta 6 udareak ere nahi bezala bana ditzakegu.

Sagarrak banatzeko erak:

$$\frac{(3+4-1)!}{3!3!} = 20$$

Udareak banatzeko erak:

$$\frac{(6+4-1)!}{6!3!} = 84$$

Biderkaketaren erregela erabiliaz: $20x84 = 1680$

- Hori bera beste era batera pentsa daiteke: Sagar bana hartu ondoren 9 ale gelditzen dira lauen artean banatzeko:

$$\frac{(9+4-1)!}{9!3!} = 220$$

Ikus daitekenez emaitza ez da berdina. Horren arrazoia erraz uler daiteke, bigarren planteamenduan ez ditugu udarea eta sagarra bereizten eta ume batek bi udare eta sagar bat gehiago hartzea bi sagar eta udare bat hartzearen parekotzat dauzkagu. Horregatik aukera gutxiago atera dira.

- Mezu bat osatzeko 12 sinbolo dauzkagu. Mezu bakoitzak 12 sinbolo eta 45 zurigune behar ditu eta gainera bi sinboloren artean beti hiru zurigune behar dira guxienez. Zenbat mezu osa daiteke? 12 sinboloekin 12! ordenazio lor daitezke, ordenazio bakoitzak sinboloen artean 11 posizio dauzka eta bakoitzean hiruna zurigune jarri behar dira, beraz 33 zurigune erabili behar ditugu mezuaren sintaxiaren arauak betetzeko. Beste 12 zuriguneak guk nahi ditugun lekuan jar daitezke. 11 kokaguneen artean banatu ditzakegu beraz $\frac{(12+11-1)!}{12!10!}$ aukera dauzkagu. Biderkaketaren erregela erabiliaz mezu-kopurua ordenazio-kopurua x ordenazio bakoitzeko lor daitekeen banaketa-kopurua izango da:

$$12!x\frac{(12+11-1)!}{12!10!}$$

- Har dezagun ondorengo programa zatia:

  for (i = 0; i < 20 ; i ++)

```
for (j = 0; j < i ; j ++)
    for (i=0; k < j ; k ++)
        printf("i = %d, j = %d, k = %d \n",i, j, k);
```

Zenbat aldiz deitzen zaio printf funtzioari?

Hirukoteak erabiltzen ditu dei bakoitzak, noiz edo noiz hirukote guztiak erabiltzen dira, edozein hirukote hartu eta bertako zenbaki handiena i aldagaiari dagokiona izango da, bigarren handiena j-ri dagokiona eta txikiena k-ri dagokiona. Horrela ikusita konbinazioetaz hitzegiten ari garela ikus daiteke, baina errepikapenak onartzen dituen konbinazioetaz. Dei kopurua $\begin{pmatrix} 3+20-1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+20-1 \\ 19 \end{pmatrix}$