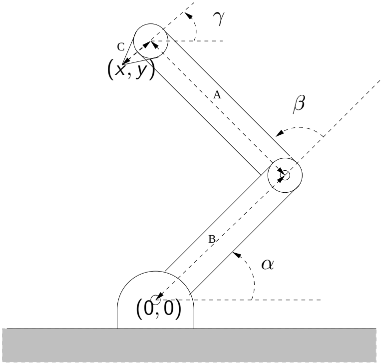
Problemaren ebazpenaren maila desberdinak eta erroreak

1. Problema erreala
2. Problema matematikoa
3. Ebazpen metodoa
   - Metodo zehatzak
   - Hurbilpen metodoak (Metodo konbergenteak)
4. Algoritmoa

Erroreen jatorriak

1. Eredutze-errorea
2. Datuen hasierako errorea
3. Metodo konbergenteen kasuan, trunkatze-errorea
4. Biribiltze-errorea

Robotaren adibidea



$$
\begin{aligned}
x &= A\cos(\alpha) + B\cos(\alpha+\beta) + C\cos(\gamma),\\
y &= A\sin(\alpha) + B\sin(\alpha+\beta) + C\sin(\gamma).
\end{aligned}
$$

Problema matematikoa

$$A, B, C, \gamma, x, y \;\longrightarrow\; \boxed{\begin{array}{rcl} A\cos(\alpha) + B\cos(\alpha+\beta) + C\cos(\gamma) & = & x, \\ A\sin(\alpha) + B\sin(\alpha+\beta) + C\sin(\gamma) & = & y. \end{array}} \;\longrightarrow\; \alpha, \beta$$

Problema sinplifikatua

$$\begin{array}{rcl} A^2 + C^2 + x^2 + y^2 & = & B^2 - 2C\cos(\alpha-\gamma)A + 2Ax\cos(\alpha) \\ & & +2Cx\cos(\gamma) + 2Ay\sin(\alpha) + 2Cy\sin(\gamma) \end{array}$$

ekuaziotik α askatu, eta gero,

$$\beta = \arccos\left(\frac{x - A\cos(\alpha) - C\cos(\gamma)}{B}\right) - \alpha$$

Metodo konbergentearen adibidea

Problema matematiko elementala

$$a > 0 \rightarrow \boxed{x^2 = a} \rightarrow x > 0$$

Metodo konbergentea

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad n = 1, 2, \ldots \\ x_n &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

$a = 2$,
$x_0 = 2$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$, $x_4 = \frac{665857}{470832}$, $\ldots$

$$x_4^2 - a = 4{,}510950444942772099\ldots \times 10^{-12} \longrightarrow x_4 \approx \sqrt{a}$$

Geratze-irizpidea

$$|x_n^2 - a| < \mathrm{tol}$$

$a = 4,\ \mathrm{tol} = 10^{-16}$.

x_n	$\lvert x_n^2 - a \rvert$
4,0000000000000000	12,000000000000000
2,5000000000000000	2,250000000000000
2,0500000000000000	0,2025000000000000
2,0006097560975610	0,0024393961927424152
2,0000000929222947	3,716891872758058 10^{-7}
2,0000000000000022	8,634552443766873 10^{-15}
2,0000000000000000	4,659718494 10^{-30}

Biribiltze-errorearen eraginaren adibidea

Problema matematikoa

$$n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \rightarrow \boxed{I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx} \rightarrow I_n$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - e^{-1} \\ I_n &= [x^n e^{x-1}]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx \; = \; 1 - nI_{n-1} \end{aligned}$$

Algoritmoa

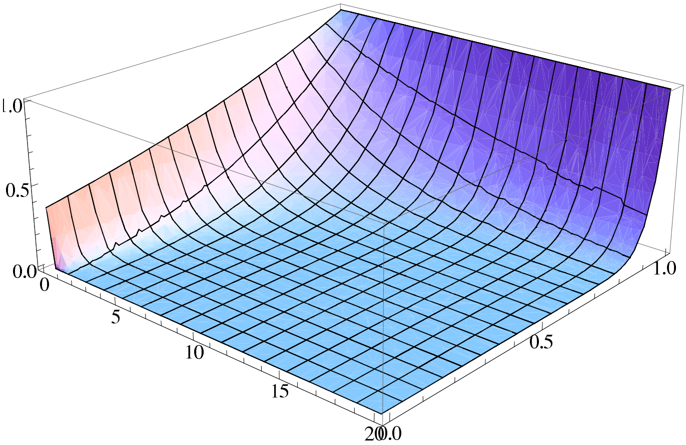
$$\begin{aligned} I_0 &:= 1 - \tfrac{1}{e}; \\ n &= 1, 2, \ldots \\ & \quad I_n := 1 - nI_{n-1} \end{aligned}$$

n	I_n	n	I_n	n	I_n
0	0,632121	7	0,112384	14	0,0627311
1	0,367879	8	0,100932	15	0,0590338
2	0,264241	9	0,0916123	16	0,0554593
3	0,207277	10	0,0838771	17	0,0571919
4	0,170893	11	0,0773522	18	−0,0294537
5	0,145533	12	0,0717732	19	1,55962
6	0,126802	13	0,0669478	20	−30,1924

Baina, $x^n e^{x-1} \geq 0$ da $\forall x \in [0,1]$, eta beraz, n guztitarako $I_n > 0$!

In[4]:= `Plot3D[x^n E^(x - 1), {n, 0, 20}, {x, 0, 1}, PlotRange → All]`

Out[4]=



Koma higikorreko aritmetikako zenbait adibide

- Edozein $x, y \in \mathbb{R}$ zenbakitarako, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, baina adibidez, $x = 1{,}23457, \quad y = 1{,}23456$, hartuz

$$\Big((x \otimes x) \ominus (y \otimes y)\Big) \ominus \Big((x \ominus y) \otimes (x \oplus y)\Big) \quad = \quad 9{,}93705 \times 10^{-17}.$$

- $s_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} \;=\; \dfrac{n}{n+1}.$

$\begin{array}{rcl} \overline{s}_0 & = & 0, \\ k & = & 1, 2, \ldots, n \\ & & \overline{s}_n \;=\; \overline{s}_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \end{array}$	$\begin{array}{rcl} \widehat{s}_0 & = & 0, \\ k & = & n, \ldots, 2, 1 \\ & & \widehat{s}_n \;=\; \widehat{s}_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \end{array}$

$n = 30000$,

$$\begin{aligned} \overline{s}_n - n/(n+1) &= 1{,}9984 \times 10^{-15}, \\ \widehat{s}_n - n/(n+1) &= -1{,}11022 \times 10^{-16} \end{aligned}$$

Koma higikorreko zenbakiak

- Oinarria, $b \geq 2$ (arruntenak, $b = 10$, $b = 2$, $b = 16, \ldots$)
- b oinarriko digitoak edo zifrak $D_b = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$,
- Zenbaki errealen b oinarriko *adierazpen normalizatua*:
  $\forall x \in -\{0\}$,

$$x = \pm[a_1, a_2 a_3 a_4 \cdots]_b \times b^e,$$

  non $a_j \in D_b$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$), $a_1 \neq 0$, $e \in \mathbb{Z}$. Adierazpen hau bakarra da.

Makina zenbakien multzoa (d =doitasuna, $m < 0$, $M > 0$)

$$\mathrm{Hg}(b, d, m, M) =$$
$$\{0\} \cup \{\pm[a_1, a_2 \cdots a_d]_b \times b^e \ / \ a_j \in D_b,\ a_1 \neq 0,\ m \leq e \leq M\}.$$

Adierazpen errorea

Zenbaki erreal bakoitzerako, $x \in \mathbb{R}$, makina zenbaki guztien artean x-etik gertuen dagoen makina zenbakia $\mathrm{hg}(x)$ adieraziko dugu.

Nolakoa da adierazpen errorea?

$$|x - \mathrm{hg}(x)| \leq \frac{1}{2}\, b^{-d+1+e}, \qquad \text{(errore absolutua)},$$

$$\frac{|x - \mathrm{hg}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\, b^{-d+1}, \qquad \text{(errore erlatiboa)}.$$

Makina epsilona: $\epsilon = \dfrac{1}{2} b^{-d+1}$.

Koma higikorreko eragiketa aritmetiko elementalak

Edozein x, y zenbaki errealetarako

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \mathrm{hg}(\mathrm{hg}(x) + \mathrm{hg}(y)), \\ x \otimes y &= \mathrm{hg}(\mathrm{hg}(x) \times \mathrm{hg}(y)). \end{aligned}$$

Aritmetika zehatzeko eragiketa aritmetiko aritmetikoen ohiko propietateak ez dituzte betetzen (trukatze-propietatea bai, baina elkartze-propietatea ez eta banagarritasun-propietatea ere ez). Alderantzizko eragiketa aritmetikoak ere antzera definitzen dira:

$$\begin{aligned} x \ominus y &= \mathrm{hg}(\mathrm{hg}(x) - \mathrm{hg}(y)), \\ x \oslash y &= \mathrm{hg}(\mathrm{hg}(x) / \mathrm{hg}(y)). \end{aligned}$$

Konbergentzia lineala

Demagun zenbaki errealen $\{a_n\}$ segidarako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - a_n|}{|a_n - a_{n-1}|} = K$$

dela. Ondorengoa froga daiteke:

- Baldin $0 < K < 1$ bada, $\exists a \in \mathbb{R}$ non $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Kasu honetan, konbergentzia lineala duela esaten da, Gainera,

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|} = K,$$

  eta beraz, n nahikoa haundirako

  $$|a_{n+1} - a| \approx K\,|a_n - a|.$$

- Baldin $K = 0$ bada, $\{a_n\}$ segida konbergentea da, eta konbergentzia superlineala duela esaten da,
- Baldin $K > 1$ bada, $\{a_n\}$ segida dibergentea da.

Konbergentzia linealaren egiaztapen esperimentala

a_n	$\lvert a_n - a_{n-1}\rvert$	$\dfrac{\lvert a_{n+1} - a_n\rvert}{\lvert a_n - a_{n-1}\rvert}$
1.		
0,725878	0,274122	0,0479434
0,73902	0,0131423	0,00494487
0,739085	0,0000649872	0,00202279
0,739085	$1{,}31455\,10^{-7}$	0,00200844
0,739085	$2{,}6402\,10^{-10}$	0,00200841
0,739085	$5{,}30259\,10^{-13}$	0,00200841
0,739085	$1{,}06498\,10^{-15}$	0,00200841
0,739085	$2{,}13891\,10^{-18}$	

Dirudienez, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lvert a_{n+1} - a_n\rvert}{\lvert a_n - a_{n-1}\rvert} \approx 0{,}00200841$, eta beraz, n nahikoa haundirako $\lvert a_{n+1} - a\rvert \approx 0{,}00200841\,\lvert a_n - a\rvert$ ($a = \lim_{n\to\infty} a_n$).

b_n	$\lvert b_n - b_{n-1}\rvert$	$\dfrac{\lvert b_{n+1} - b_n\rvert}{\lvert b_n - b_{n-1}\rvert}$
0,74		
0,738469	0,00153144	0,673722
0,7395	0,00103177	0,673538
0,738805	0,000694933	0,673662
0,739274	0,00046815	0,673578
0,738958	0,000315336	0,673635
0,739171	0,000212421	0,673597
0,739028	0,000143086	0,673622
0,739124	0,000096386	

Dirudienez, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lvert b_{n+1} - b_n\rvert}{\lvert b_n - b_{n-1}\rvert} \approx 0{,}673597$, eta beraz, n nahikoa haundirako $\lvert b_{n+1} - b\rvert \approx 0{,}673597\,\lvert b_n - b\rvert$ ($b = \lim_{n\to\infty} b_n$).

Konbergentzia azkartzeko Aitken-en Δ^2 metodoa

- izan bedi $\{a_n\}$ konbergentzia lineala duen segida, eta bere limitea a
- gainera, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} elementuak a balioaren alde berean egon bitez, hau da, $(a_n - a)(a_{n+1} - a) > 0$ eta $(a_{n+1} - a)(a_{n+2} - a) > 0$
- n nahiko handirako, $\frac{a_{n+2}-a}{a_{n+1}-a} \approx \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a}$ $\rightarrow a(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = a_n`$
- $a_n` \approx a_n + \frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n}$
- $\{a_n`\}$ segidak ere limitetzat a balioa dauka, eta orokorrean, konbergentzia azkarragoa da.

Konbergentzia superlinealaren adibideak

c_n	$\lvert c_n - c_{n-1} \rvert$	$\dfrac{\lvert c_{n+1} - c_n \rvert}{\lvert c_n - c_{n-1} \rvert}$
1.		
0,750364	0,249636	0,0450695
0,739113	0,011251	0,00246712
0,739085	0,0000277575	$6{,}12891\,10^{-6}$
0,739085	$1{,}70123\,10^{-10}$	$3{,}75641\,10^{-11}$
0,739085	$6{,}39054\,10^{-21}$	$1{,}41107\,10^{-21}$
0,739085	$9{,}01747\,10^{-42}$	$1{,}99111\,10^{-42}$
0,739085	$1{,}79547\,10^{-83}$	$3{,}9645\,10^{-84}$
0,739085	$7{,}11815\,10^{-167}$	

Dirudienez, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert c_{n+1} - c_n \rvert}{\lvert c_n - c_{n-1} \rvert} = 0$, eta beraz, $\{c_n\}$ segidak konbergentzia superlineala dauka.

d_n	$\lvert d_n - d_{n-1}\rvert$	$\dfrac{\lvert d_{n+1} - d_n\rvert}{\lvert d_n - d_{n-1}\rvert}$
0,7		
0,741467	0,0414671	0,0579478
0,739064	0,00240293	0,00871623
0,739085	0,0000209445	0,000525579
0,739085	$1{,}1008\,10^{-8}$	$4{,}62711\,10^{-6}$
0,739085	$5{,}09351\,10^{-14}$	$2{,}43061\,10^{-9}$
0,739085	$1{,}23803\,10^{-22}$	$1{,}12467\,10^{-14}$
0,739085	$1{,}39238\,10^{-36}$	$2{,}73364\,10^{-23}$
0,739085	$3{,}80628\,10^{-59}$	

Badirudi $\{d_n\}$ segidaren konbergentzia ere superlineala dela.

Bektore segidetarako konbergentzia lineala

Demagun $\{a_n\}$ (d dimentsioko) bektore errealen segida dela ($a_n \in \mathbb{R}^d$) eta $||\cdot||$ norma jakin batetarako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||a_{n+1} - a_n||}{||a_n - a_{n-1}||} = K$$

dela. Ondorengoa froga daiteke:

- Baldin $0 < K < 1$ bada, $\exists a \in \mathbb{R}^d$ non $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Kasu honetan, konbergentzia lineala duela esaten da, Gainera,

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{||a_{n+1} - a||}{||a_n - a||} = K,$$

  eta beraz, n nahikoa haundirako

  $$||a_{n+1} - a|| \approx K\, ||a_n - a||.$$

- Baldin $K = 0$ bada, $\{a_n\}$ segida konbergentea da, eta konbergentzia superlineala duela esaten da,
- Baldin $K > 1$ bada, $\{a_n\}$ segida ez da konbergentea (gutxienez osagai baterako dibergentea da).

Hau aldatu beharra dago, normak erabiliz, eta definizioan a erabili gabe.

Konbergentzia-ordena

Demagun $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dela. Esaten da $\{a_n\}$ segidaren konbergitzia ordena l dela baldin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|^l} = C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Kasu horretan, n nahikoa haundirako

$$|a_{n+1} - a| \approx C\, |a_n - a|^l.$$

Oharrak:

- Konbergentzia-ordena beti da $l \geq 1$,
- Kasu partikularra: $l = 1$, konbergentzia lineala,
- Aldiz, $l > 1$ denean, konbergentzia superlineala,
- Konbergentzial-ordena zenbat eta haundiagoa izan (n nahikoa haundirako) konbergentzia azkarragoa,

Demagun $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dela. Idazkera: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Konbergentzia-ordenaren egiaztapen esperimentala

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Delta a_n|}{|\Delta a_{n-1}|^l} = C \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|^l} = C.$$

Eta l zein izan daitekeen ez badakigu?

Konbergentzia-ordenaren estimazioa

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\Big(|\Delta a_n|/|\Delta a_{n-1}|\Big)}{\log\Big(|\Delta a_{n-1}|/|\Delta a_{n-2}|\Big)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|^l} \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Konbergentzia-ordenaren egiaztapen esperimentalaren adibideak

c_n	$\lvert\Delta c_n\rvert = \lvert c_{n+1} - c_n\rvert$	$k_n = \dfrac{\lvert\Delta c_n\rvert}{\lvert\Delta c_{n-1}\rvert}$	$\dfrac{\log(k_n)}{\log(k_{n-1})}$
1,00000000000	0,249636		
0,75036386784	0,011251	0,0450695	
0,73911289091	0,0000277575	0,00246712	1,93728
0,73908513338	$1{,}70123\,10^{-10}$	$6{,}12891\,10^{-6}$	1,99885
0,73908513321	$6{,}39054\,10^{-21}$	$3{,}75641\,10^{-11}$	2
0,73908513321	$9{,}01747\,10^{-42}$	$1{,}41107\,10^{-21}$	2
0,73908513321	$1{,}79547\,10^{-83}$	$1{,}99111\,10^{-42}$	2
0,73908513321	$7{,}11815\,10^{-167}$	$3{,}9645\,10^{-84}$	2
0,73908513321			

Konbergentzia-ordena $l = 2$ dela dirudi.

Konbergentzia-ordena $l = 2$ den egiaztatzeko,

c_n	$\lvert\Delta c_n\rvert = \lvert c_{n+1} - c_n\rvert$	$\dfrac{\lvert\Delta c_n\rvert}{\lvert\Delta c_{n-1}\rvert^2}$
1,000000000000000	0,249636	
0,7503638678402439	0,011251	0,180541
0,7391128909113617	0,0000277575	0,219281
0,7390851333852840	$1{,}70123\,10^{-10}$	0,220802
0,7390851332151606	$6{,}39054\,10^{-21}$	0,220805
0,7390851332151606	$9{,}01747\,10^{-42}$	0,220805
0,7390851332151606	$1{,}79547\,10^{-83}$	0,220805
0,7390851332151606	$7{,}11815\,10^{-167}$	0,220805
0,7390851332151606		

Badirudi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lvert\Delta c_n\rvert}{\lvert\Delta c_{n-1}\rvert^2} \approx 0{,}220805$, eta beraz, n nahikoa haundirako $\lvert c_{n+1} - c\rvert \approx 0{,}220805\,\lvert c_n - c\rvert^2$.

d_n	$\lvert\Delta d_n\rvert = \lvert d_{n+1} - d_n\rvert$	$k_n = \dfrac{\lvert\Delta d_n\rvert}{\lvert\Delta d_{n-1}\rvert}$	$\frac{\log(k_n)}{log(k_{n-1})}$
0,700000000000	0,037000000		
0,737000000000	0,002103520	0,056851	
0,739103520107	0,000018395	0,008745	1,65286
0,739085124740	$8{,}474632 \times 10^{-9}$	0,00046	1,62109
0,739085133215	$3{,}440617 \times 10^{-14}$	$4{,}06 \times 10^{-6}$	1,61587
0,739085133215	$6{,}438263 \times 10^{-23}$	$1{,}871 \times 10^{-9}$	1,61882
0,739085133215	$4{,}891193 \times 10^{-37}$	$7{,}597 \times 10^{-1}$	1,61773
0,739085133215	$6{,}953337 \times 10^{-60}$	$1{,}4216 \times 10^{-2}$	1,61815
0,739085133215			

Konbergentzia-ordena $l \approx 1{,}618$ dela dirudi.

Konbergentzia-ordena $l \approx 1{,}618$ den egiaztatzeko,

d_n	$\lvert\Delta d_n\rvert = \lvert d_{n+1} - d_n\rvert$	$\dfrac{\lvert\Delta d_n\rvert}{\lvert\Delta d_{n-1}\rvert^{1{,}618}}$
0,700000000000	0,037000000	
0,737000000000	0,002103520	0,43611
0,739103520107	0,000018395	0,394621
0,739085124740	$8{,}474632 \times 10^{-9}$	0,388886
0,739085133215	$3{,}440617 \times 10^{-14}$	0,395309
0,739085133215	$6{,}438263 \times 10^{-23}$	0,391283
0,739085133215	$4{,}891193 \times 10^{-37}$	0,393393
0,739085133215	$6{,}953337 \times 10^{-60}$	0,391489
0,7390851332151606		

Badirudi $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\lvert\Delta d_n\rvert}{\lvert\Delta d_{n-1}\rvert^{1{,}618}} \approx 0{,}39$, eta beraz, n nahikoa haundirako $\lvert d_{n+1} - d\rvert \approx 0{,}39\,\lvert d_n - d\rvert^{1{,}618}$.

Problema matematikoen baldintzapena

$$\text{datuak} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{problema}\\ \text{matematikoa}\end{array}} \longrightarrow \text{emaitza}$$

Nola aldatzen da emaitza datua pixka bat aldatuz gero?

Adibidea: Eguraldiaren aurrikustearen problema

- Hogeitalau orduko aurrerapenarekin → Nahikoa ondo baldintzatuta
- Hilabeteko aurrerapenarekin → Oso gaizki baldintzatuta

Problemaren baldintzapenaren definizioa

Datuak pixka bat aldatuz emaitzak asko alda badaitezke, problema gaizki baldintzatuta dagoela esaten da.

Sarrera erreal bakarreko problemen baldintzapena

Demagun ondoko problema matematiko sinplea daukagula.

$$x \longrightarrow \boxed{\ y \ = \ f(x)\ } \longrightarrow y$$

Nola aldatzen da y soluzioa x datua pixka bat aldatuz gero? Hori kuantitatiboki ikusteko, $k(x)$ baldintzapen zenbakia definitzen da:

$$k(x) := \lim_{\bar{x}\to x} \frac{|f(\bar{x}) - f(x)|/|f(x)|}{|\bar{x} - x|/|x|} = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Eta beraz, $|\bar{x} - x|/|x|$ txikia denean,

$$\frac{|f(\bar{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx k(x)\frac{|\bar{x} - x|}{|x|}, \quad \text{non} \quad k(x) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}.$$

Adibideak

1. Demagun $f(x) = \sqrt{x}$ dela. Orduan,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad k(x) = \frac{|x|}{2\sqrt{x}}/|\sqrt{x}| = \frac{1}{2}.$$

   Beraz, $|\bar{x} - x|/|x|$ txikia denean,

$$\frac{|\sqrt{\bar{x}} - \sqrt{x}|}{|\sqrt{x}|} \approx \frac{1}{2}\frac{|\bar{x} - x|}{|x|}.$$

2. Demagun $f(x) = e^x$ dela. Orduan,

$$f'(x) = e^x, \quad k(x) = \frac{|x|e^x}{e^x} = |x|.$$

   Beraz, $|\bar{x} - x|/|x|$ txikia denean,

$$\frac{|e^{\bar{x}} - e^x|}{|e^x|} \approx |x|\frac{|\bar{x} - x|}{|x|}.$$

Bi sarrera errealeko problemen baldintzapena

$$x, y \longrightarrow \boxed{z \quad = \quad f(x,y)} \longrightarrow z$$

Nola aldatzen da z soluzioa x eta y datuak pixka bat aldatuz gero? Hori kuantitatiboki ikusteko, $k_x(x,y)$ eta $k_y(x,y)$ definitzen dira:

$$k_x(x,y) := \frac{\left| x \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|}{|f(x,y)|}, \quad k_y(x,y) := \frac{\left| y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|}{|f(x,y)|}.$$

Datuen errore erlatiboak, $\frac{|\bar{x}-x|}{|x|}$ eta $\frac{|\bar{y}-y|}{|y|}$, txikiak direnean,

$$\frac{|f(\bar{x},\bar{y}) - f(x,y)|}{|f(x,y)|} \approx\leq k_x(x,y)\frac{|\bar{x}-x|}{|x|} + k_y(x,y)\frac{|\bar{y}-y|}{|y|}.$$

Eragiketa aritmetiko elementalen baldintzapena

Biderkaketa (ondo baldintzatua)

$f(x,y) = xy$, $k_x(x,y) = 1$, $k_y(x,y) = 1$, eta beraz, $\frac{|\bar{x}-x|}{|x|}$ eta $\frac{|\bar{y}-y|}{|y|}$, txikiak direnean,

$$\frac{|\bar{x}\bar{y} - xy|}{|xy|} \approx\leq \frac{|\bar{x} - x|}{|x|} + \frac{|\bar{y} - y|}{|y|}.$$

Zatiketa (ondo baldintzatua)

$f(x,y) = x/y$, $k_x(x,y) = 1$, $k_y(x,y) = 1$, eta beraz, $\frac{|\bar{x}-x|}{|x|}$ eta $\frac{|\bar{y}-y|}{|y|}$ txikiak direnean,

$$\frac{|\bar{x}/\bar{y} - x/y|}{|x/y|} \approx\leq \frac{|\bar{x} - x|}{|x|} + \frac{|\bar{y} - y|}{|y|}.$$

Batuketa

$f(x,y) = x + y$, $k_x(x,y) = \frac{|x|}{|x+y|}$, $k_y(x,y) = \frac{|y|}{|x+y|}$, eta beraz, $\delta_x := \frac{|\bar{x}-x|}{|x|}$ eta $\delta_y := \frac{|\bar{y}-y|}{|y|}$, txikiak direnean,

$$\frac{|(\bar{x}+\bar{y})-(x+y)|}{|x+y|} \approx\leq \frac{|x|}{|x+y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x+y|}\delta_y.$$

Baldintzapen txarra $y \approx -x$ denean.

Kenketa

$f(x,y) = x - y$, $k_x(x,y) = \frac{|x|}{|x-y|}$, $k_y(x,y) = \frac{|y|}{|x-y|}$, eta beraz, $\delta_x := \frac{|\bar{x}-x|}{|x|}$ eta $\delta_y := \frac{|\bar{y}-y|}{|y|}$, txikiak direnean,

$$\frac{|(\bar{x}-\bar{y})-(x-y)|}{|x-y|} \approx\leq \frac{|x|}{|x-y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x-y|}\delta_y.$$

Baldintzapen txarra $y \approx x$ denean.

Algoritmoen egonkortasuna

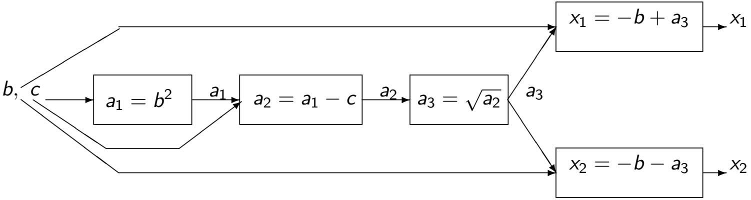
Definizioak

- Algoritmoa egonkorra dela esaten da baldin biribiltze erroreen eragina txikia dela ziurtatuta badago.
- Algoritmoa datu konkretu batzutarako desegonkorra suertatu dela esango dugu, baldin tarteko biribiltze-erroreen ondorioz sortutako azken emaitzaren errore erlatiboa haundia izan bada.

Biribiltze-erroreen eraginaren adibide bat

$$\begin{array}{c} b, c \\ (b^2 > c) \end{array} \longrightarrow \boxed{x^2 + 2bx + c = 0} \longrightarrow x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

Algoritmoa



$x^2 + 242{,}14x + 6{,}2949 = 0$ ebatzi $\mathrm{Hg}(10,5)$ aritmetikan..

$$
\begin{aligned}
a_1 &= b \otimes b = \mathrm{hg}(121{,}07 \times 121{,}07) = 14658 \\
a_2 &= a_1 \ominus c = \mathrm{hg}(14658 - 6{,}2949) = 14652 \\
a_3 &= \mathrm{hg}\left(\sqrt{a_2}\right) = \mathrm{hg}(\sqrt{14652}) = 121{,}05 \\
x_1 &= -b \oplus a_3 = \mathrm{hg}(-121{,}07 + 121{,}05) = \boxed{\text{-0.02}} \\
x_2 &= -b \ominus a_3 = \mathrm{hg}(-121{,}07 - 121{,}05) = \boxed{\text{-242.12}}
\end{aligned}
$$

Emaitza zuzenak $\mathrm{Hg}(10,5)$ aritmetikan: $\left\{ \begin{aligned} x_1 &= -0{,}02600, \\ x_2 &= -242{,}11. \end{aligned} \right.$

Errore erlatiboak:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\rightarrow \frac{|-0{,}02 - (-0{,}02600)|}{|-0{,}02600|} = 0{,}230769, \\
x_2 &\rightarrow \frac{|-242{,}12 - (-242{,}11)|}{|-242{,}11|} = 0{,}0000413035.
\end{aligned}
$$