Metodología de la Programación

Segundo parcial (27 de Abril de 2012)

Facultad de Informática de San Sebastián

1. Documentar con las aserciones que se marcan el siguiente programa iterativo que decide si el array `A(1..n)` hay dos elementos consecutivos iguales.

   (1) $\{\mathbf{n \geq 2}\}$
   `i:=2;`
   (2) $\mathbf{INV} \equiv \{\forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j < i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{2 \leq i \leq n}\}$
   $\quad\mathbf{E} \equiv (\mathbf{n - i})$
   `while i < n and A(i-1)≠A(i) loop`
   $\qquad$ (3) $\{\forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j \leq i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{2 \leq i < n}\}$
   $\qquad$ `i:=i+1;`
   `end loop;`
   (4) $\{(\forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j < n \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{i = n})\ \vee\ (\mathbf{A(i-1) = A(i) \wedge 2 \leq i \leq n})\}$
   `b:=A(i-1)=A(i);`
   (5) $\{\mathbf{b} \leftrightarrow \exists \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j \leq n \wedge A(j-1) = A(j)}\ )\}$

2. Demostrar formalmente que la iteración del ejercicio anterior preserva el invariante.

   Hay que demostrar que $\{\mathbf{INV} \wedge \mathbf{B}\}\mathbf{P}\{\mathbf{INV}\}$: siendo:

   - $\mathbf{INV} \equiv \equiv \{\forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j < i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{2 \leq i \leq n}\}$
   - $\mathbf{B} \equiv$ `i < n and A(i-1)≠A(i)`
   - $\mathbf{P} \equiv$ `i:=i+1;`

   1. $(\ \forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j < i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{i \leq n}\ \wedge\ \mathbf{i < n}\ \wedge\ \mathbf{A(i-1) \neq A(i)}\ ) \rightarrow$
   $(\ \forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j \leq i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{i \leq n}\ \wedge\ \mathbf{i < n}\ )$

   2. $\{\ \forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j \leq i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{i \leq n}\ \wedge\ \mathbf{i < n}\ \}$
   `i := i+1;`
   $\{\ \forall \mathbf{j}\ (\ \mathbf{2 \leq j < i \rightarrow A(j-1) \neq A(j)}\ )\ \wedge\ \mathbf{i \leq n}\ \wedge\ \mathbf{i \leq n}\ \}$ $(\mathbf{AA})$

   3. $\{\mathbf{INV} \wedge \mathbf{B}\}\mathbf{P}\{\mathbf{INV}\}$ **por 1, 2 y (RCN)**

3. Dadas las dos siguientes afirmaciones:

$\{\ 4 \times x = 5^{k+1} - 1\}$	$\{\ x = 5^{k+1}\}$
$k := k + 1;$	$k := k + 1;$
$x := x + 5^{k};$	$x := x + 5^{k};$
$\{\ 4 \times x = 5^{k+1} - 1\}$	$\{\ x = 5^{k+1}\}$

   exactamente una de ellas es correcta. Demostrar formalmente la afirmación correcta y dar un contraejemplo de la incorrecta.

---

a) $\{\ 4 \times x = 5^{k+1} - 1\}$ es CORRECTA/~~INCORRECTA~~ (táchese lo que no proceda)
$k := k + 1;$
$x := x + 5^{k};$
$\{\ 4 \times x = 5^{k+1} - 1\}$

Demostración:

1. $(\ \mathbf{4 \times x = 5^{k+1} - 1}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{4 \times x + 4 \times 5^{k+1} = 5^{k+1} - 1 + 4 \times 5^{k+1}}\ ) \rightarrow$
$\rightarrow (\ \mathbf{4 \times (x + 5^{k+1}) = 5 \times 5^{k+1} - 1}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{4 \times (x + 5^{k+1}) = 5^{k+2} - 1}\ )$

2. $\{\ \mathbf{4 \times (x + 5^{k+1}) = 5^{k+2} - 1}\ \}$ `k := k+1;` $\{\ \mathbf{4 \times (x + 5^{k}) = 5^{k+1} - 1}$ $(\mathbf{AA})$

3. $\{\ \mathbf{4 \times (x + 5^{k}) = 5^{k+1} - 1}\ \}$ `x := x + 5`$^{\mathbf{k}}$`;` $\{\ \mathbf{4 \times x = 5^{k+1} - 1}$ $(\mathbf{AA})$

4. **1, 2, 3, (RCP) y (RCN)**

b) $\{ \mathtt{x} = 5^{\mathtt{k}+1} \}$ es ~~CORRECTA~~/INCORRECTA (táchese lo que no proceda)

$\mathtt{k} := \mathtt{k} + 1;$
$\mathtt{x} := \mathtt{x} + 5^{\mathtt{k}};$
$\{ \mathtt{x} = 5^{\mathtt{k}+1} \}$

Contraejemplo: Sea el estado de entrada es $\{ \mathbf{k = 1 \wedge x = 25} \}$ que cumple la precondición (**25 es igual a 5^2**). Entonces el estado de salida es $\{ \mathbf{k = 2 \wedge x = 50} \}$ que no cumple la postcondición ya que $\mathbf{50 \neq 5^3 = 125}$

4. Verificar que la siguiente función recursiva calcula lo que su especificación dice.

```
function f (n: Integer) return r: Integer is
aux: Integer;
Pre ≡ {n ≥ 1}
        if n = 1 then r := 1;
        else aux := f(n − 1);
             r := n + aux;
        end if;
Post ≡ {r = (n² + n)/2}
```

Hay que demostrar que: $\{\mathbf{n \geq 1}\}\ [\ \mathbf{r := f(n);}\ ]\ \{\mathbf{r = (n^2 + n)/2}\}$

Caso Simple: $\mathbf{n = 1}$ $\{\mathbf{n \geq 1 \wedge n = 1}\}\ \mathbf{r := 1;}\ \{\mathbf{r = (n^2+n)/2}\}$

1. $(\ \mathbf{n \geq 1 \wedge n = 1}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{1 = (n^2+n)/2}\ )$
2. $\{\ \mathbf{1 = (n^2+n)/2}\ \}\ \mathtt{r := 1;}\ \{\ \mathbf{r = (n^2+n)/2}\}$ **(AA)**
3. $\{\mathbf{n \geq 1 \wedge n = 1}\}\ \mathbf{r := 1;}\ \{\mathbf{r = (n^2+n)/2}\}$ **por 1, 2 y (RCN)**

Caso Inductivo: $\mathbf{n \neq 1}$ $\{\mathbf{n \geq 1 \wedge n \neq 1}\}\ \mathtt{aux := f(n-1); r := n + aux;}\ \{\mathbf{r = (n^2+n)/2}\}$

Hipótesis de inducción: $\{\mathbf{n - 1 \geq 1}\}\ [\ \mathbf{aux := f(n-1);}\ ]\ \{\mathbf{aux = ((n-1)^2 + n - 1)/2}\}$

1. $(\ \mathbf{n \geq 1 \wedge n \neq 1}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{n > 1}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{n - 1 \geq 1}\ )$
2. $\{\ \mathbf{n - 1 \geq 1}\ \}\ \mathtt{aux := f(n-1);}\ \{\ \mathbf{aux = ((n-1)^2 + n - 1)/2}\}$ **(H.I.)**
3. $(\ \mathbf{aux = ((n-1)^2 + n - 1)/2}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{n + aux = n + ((n-1)^2 + n - 1)/2}\ ) \rightarrow$
   $(\ \mathbf{n + aux = (2.n + n^2 - 2.n + 1 + n - 1)/2}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{n + aux = (n^2+n)/2}\ )$
4. $\{\ \mathbf{n + aux = ((n^2+n)/2}\}\ \mathtt{r := n + aux;}\ \{\ \mathbf{r = ((n^2+n)/2}\}$ **(AA)**
5. $\{\mathbf{n \geq 1 \wedge n \neq 1}\}\ \mathtt{aux := f(n-1); r := n + aux;}\ \{\mathbf{r = (n^2+n)/2}\}$
   por 1, 2, 3, 4, (RCP) y (RCN)

Validación de la inducción:

Expresión cota: $\mathbf{E \equiv n}$

Caso simple: $\mathbf{n = 1}$ $(\mathbf{n \geq 1 \wedge n = 1}) \rightarrow (\mathbf{n = 1}) \rightarrow \mathbf{n \in \mathbb{N}}$

Caso inductivo: $\mathbf{n \neq 1}$ $(\mathbf{n \geq 1 \wedge n \neq 1}) \rightarrow (\mathbf{n - 1 \geq 1}) \rightarrow$
$(\ \mathbf{n - 1 \in \mathbb{N}\ \wedge\ n - 1 < n}\ )$