# Tema 4: Lenguajes recursivos y recursivamente enumerables

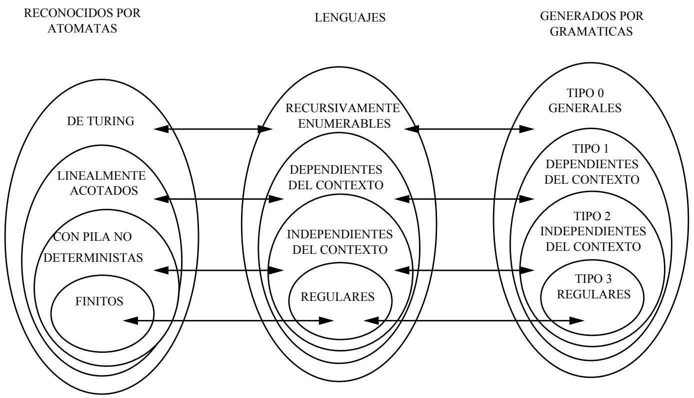
- Gramáticas generales
- Autómatas de Turing

OBJETIVOS:

- Estudiar un modelo reconocedor: autómatas de Turing y un modelo generador: gramáticas generales (o de tipo 0)
- Entender todas las definiciones formales que incluyen, distinguiendo sus particularidades.
- Adquirir habilidad en la resolución de problemas concretos de definición de lenguajes utilizando estos modelos.
- Distinguir la relación entre todas las clases de lenguajes como se recoge en la jerarquía de Chomsky.



# Jerarquía de Chomsky






# Gramáticas generales o de tipo 0

- Elementos:

| Componentes | Componentes formales |
|---|---|
| Categorías | Conjunto de no terminales $N$ |
| Fuente de entrada | Alfabeto de terminales $\Sigma$ |

- Elemento distinguido: $S \in N$ símbolo inicial
- Definición formal: $G = (N, \Sigma, S, P)$ donde P es el conjunto de reglas de la forma: $\alpha \to \beta \in P$ con $\alpha \in (N \cup \Sigma)^* - \Sigma^*$, $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$
- Paso de derivación: (aplicación de una regla)
  $\delta_1 \Rightarrow \delta_2$ si y solo si $\delta_1 = \sigma_1 \alpha \sigma_2$, $\delta_2 = \sigma_1 \beta \sigma_2$ y $\alpha \to \beta \in P$
- Lenguaje generado: $L(G) = \{ w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w \}$



# Ejemplo de Gramática general

**G = (N, Σ, S, P)** con **N** = {S, M, F, X, A, B} , **Σ** = {a, b, c} y

**P:**

$S \to c \mid McF$

$Mc \to aMcA \mid bMcB \mid cX$

| | | |
|---|---|---|
| $Aa \to aA$ | $Ab \to bA$ | $AF \to aF$ |
| $Ba \to aB$ | $Bb \to bB$ | $BF \to bF$ |
| $Xa \to aX$ | $Xb \to bX$ | $XF \to \varepsilon$ |

**G** genera el lenguaje **L(G)** $= \{ w.c.w : w \in \{a,b\}^* \}$

**Ejemplo de derivación en G:**

$S \Rightarrow McF \Rightarrow aMcAF \Rightarrow aMcaF \Rightarrow aaMcAaF \Rightarrow aaMcaAF \Rightarrow aaMcaaF$

$\Rightarrow aabMcBaaF \Rightarrow aabMcaBaF \Rightarrow aabMcaaBF \Rightarrow aabMcaabF \Rightarrow$

$aabcXaabF \Rightarrow aabcaXabF \Rightarrow aabcaaXbF \Rightarrow aabcaabXF \Rightarrow aabcaab$

# Otros ejemplos

- $G_1 = (N, \Sigma, S, P)$ con $N = \{S, A, B\}$ , $\Sigma = \{a, b\}$ y

  P: $S \to SBA \mid a$

  $BA \to AB$

  $aA \to aaB$

  $B \to b$

  ¿$L(G_1)$?

  $\boxed{L(G_1) = \{\mathbf{a}^{n+1}\mathbf{b}^{2n}: n \geq 0\}}$

- $L(G_2) = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n\mathbf{c}^n: n \geq 0\}$

  ¿$G_2$?

  $G_2 = (N, \Sigma, S, P)$ con $N = \{S, A, C\}$ , $\Sigma = \{a, b, c\}$ y

  P: $S \to aAbc \mid \varepsilon$ $\quad Cb \to bC$

  $A \to aAbC \mid \varepsilon$ $\quad Cc \to cc$

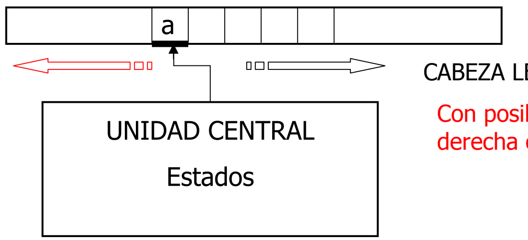


# Autómata de Turing

MEMORIA Y CINTA DE ENTRADA DIVIDIDA EN CELDAS

Cada celda un símbolo o en blanco

Cinta infinita (por ambos extremos)




CABEZA LECTORA-ESCRITORA

Con posibilidad de moverse a derecha o izquierda

Configuraciones especiales: de inicio y fin



# Autómata de Turing (AT)

- **Elementos**

| Componentes físicos | Componentes lógicos |
|---|---|
| Unidad de Proceso | Conjunto de estados $Q$ |
| Fuente de entrada | Alfabeto de entrada $\Sigma$ |
| Memoria | Alfabeto de cinta $\Gamma$ con $\Sigma \subset \Gamma$ y con el símbolo blanco (□) |

- **Elementos distinguidos** para la inicialización y aceptación:
  - $q_0 \in Q$: estado inicial
  - $F \subseteq Q$: conjunto de estados finales

- **Ciclo-máquina**

| Consultas: | Acciones: |
|---|---|
| Estado actual | Cambio de estado |
| Símbolo de cinta actual | Modificación de la cinta (escribir) |
| | Mover cabeza-lectora: |
| | *derecha (R) o izquierda (L)* |



# Definición de AT

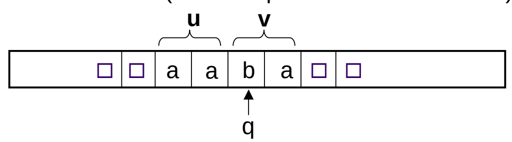
- Definición formal de AT: $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ con f. transición

  $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$ (es una f. parcial)

  $\delta$ (q-actual, símb-actual) = (nuevo-q, símb-escribir, mov-cabeza)

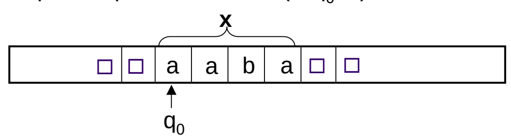
- Configuración: $(\mathbf{u}, q, \mathbf{v}) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$ representando el estado actual q y la palabra en cinta **uv** (cabeza apunta al comienzo de **v**)

  Ej: (aa, q, ba)




- Configuración inicial para la palabra $\mathbf{x} \in \Sigma^*$: $(\varepsilon, q_0, \mathbf{x})$

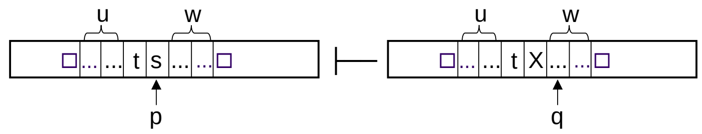
  Ej: $(\varepsilon, q_0, aaba)$



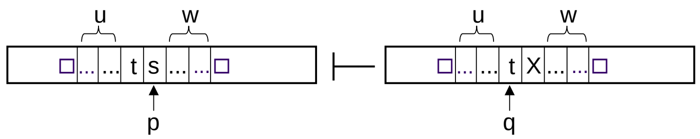
# Movimientos de un AT

- Movimientos: (con $s,t,X \in \Gamma$ $u,w \in \Gamma^*$)

  $(ut, p, sw) \vdash (utX, q, w)$ si y solo si $\delta(p, s) = (q, X, R)$




  $(ut, p, sw) \vdash (u, q, tXw)$ si y solo si $\delta(p, s) = (q, X, L)$






# Lenguaje aceptado por un AT

ASUMIMOS que para los estados finales no hay transiciones

- Lenguaje aceptado por M:

  $L(M) = \{ \mathbf{x} \in \Sigma^* \ : \ \exists\, q \in F \ / \ (\varepsilon, q_0, \mathbf{x}) \vdash^* (\mathbf{u}, q, \mathbf{w}) \ \text{con } \mathbf{u},\mathbf{w} \in \Gamma^* \}$

***Algunos puntos importantes:***

- Ante una entrada concreta $\mathbf{x} \in \Sigma^*$, un AT puede *parar* o *no parar*
- Un AT se *para* cuando, estando en un estado actual q y con un símbolo (de cinta) actual s, no hay transición $\delta(q, s)$
- Como asumimos que para los estados finales no hay transiciones, si llegamos a un estado final ➔ el AT se para y reconoce **x**
- Si el AT se para y el estado actual es no-final ➔ no reconoce **x**
- La palabra de entrada $\mathbf{x} \in \Sigma^*$ no necesita ser "leída entera" para ser reconocida (**x** puede ser recorrida y reescrita en ambas direcciones total o parcialmente): **u,w cualesquiera** en la configuración final.



# AT para L= $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$

$M = ( \{q_0, q_b, q_c, q_□, q_{XY}, q_M\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, X, Y, □\}, \delta, q_0, \{q_M\} )$

| $\delta$ | a | b | c | □ | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_b$, □, R) | --- | --- | $(q_M$, □, L) | $(q_{XY}$, □, R) | - |
| $q_b$ | R | $(q_c$, X, R) | --- | --- | R | --- |
| $q_c$ | --- | R | $(q_□$, Y, L) | --- | - | R |
| $q_□$ | L | L | - | $(q_0$, □, R) | L | L |
| $q_{XY}$ | --- | --- | --- | $(q_M$, □, L) | R | R |
| $q_M$ | --- | --- | --- | --- | --- | --- |



# AT para L= $\{ w.c.w : w \in \{a,b\}^* \}$

**M** = $(\{q_0, q_a, q_b, q_A, q_B, q_\#, q_□, q_M\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,\#, □\}, \delta, q_0, \{q_M\} )$

| $\delta$ | **a** | **b** | **c** | □ | # |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_a$, □, R) | $(q_b$, □, R) | $(q_\#$, c, R) | --- | - |
| $q_a$ | R | R | $(q_A$, c, R) | --- | - |
| $q_b$ | R | R | $(q_B$, c, R) | --- | - |
| $q_A$ | $(q_□$, **#**, L) | --- | --- | --- | R |
| $q_B$ | --- | $(q_□$, **#**, L) | --- | --- | R |
| $q_□$ | L | L | L | $(q_0$, □, R) | L |
| $q_\#$ | --- | --- | --- | $(q_M$, □, R) | R |
| $q_M$ | --- | --- | --- | --- | --- |

# Lenguajes Recursivos y Recursivamente Enumerables

- Sea M un autómata de Turing. Problema de decisión: ¿$w \in L(M)$?

Posibles respuestas (sobre dicha entrada w):

- M se para en un estado final $\Rightarrow w \in L(M)$
- M se para en un estado no final $\Rightarrow w \notin L(M)$
- M no se para $\Rightarrow w \notin L(M)$

L es un lenguaje RECURSIVO si existe un autómata de Turing M que se para ante cualquier entrada y tal que:

- si $w \in L \Rightarrow$ M se para en un estado final
- si $w \notin L \Rightarrow$ M se para en un estado no final

L es un lenguaje RECURSIVAMENTE ENUMERABLE si existe un autómata de Turing M tal que:

- si $w \in L \Rightarrow$ M se para en un estado final
- si $w \notin L \Rightarrow$ M se para en un estado no final o M no se para.



# Resumen Jerarquía de Chomsky

| **Gramáticas** $G = (N, \Sigma, P, S)$ | **Autómatas** | **Lenguajes** |
|---|---|---|
| **Tipo 3 (GLDs)**<br>$A \to wB$<br>$A \to z$<br>$A \in N$, $z \in \Sigma^*$, $w \in \Sigma^+$ | **A. Finito** $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$<br>AFD $\delta: Q \times \Sigma \dashrightarrow Q$<br>AFN $\delta: Q \times \Sigma \to \wp(Q)$<br>ε-AFN $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \wp(Q)$ | Regulares |
| **Tipo 2**<br>$A \to \alpha$<br>$A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ | **A. con pila**<br>$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$<br>$\delta: Q \times \Sigma \times (\Gamma \cup \{\perp\}) \to \wp(Q \times \Gamma^*)$ | Independientes del contexto |
| **Tipo 1**<br>$\beta A \delta \to \beta \alpha \delta$<br>$A \in N$, $\alpha, \beta, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$ | A. linealmente acotado | Sensibles al contexto |
| **Tipo 0**<br>$\alpha \to \beta$<br>$\alpha \in (N \cup \Sigma)^* - \Sigma^*$, $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$ | **A. de Turing**<br>$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$<br>$\delta: Q \times \Gamma \dashrightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$ | Recursivamente enumerables |