EJERCICIOS del TEMA 3: Lenguajes independientes del contexto

Sobre GICs (gramáticas independientes del contexto)

1. Sea G una gramática con las siguientes producciones:

S → ASB | ε

A → **a**A**b** | ε

B → **b**B**a** | **ba**

a) Da una derivación a la izquierda de la palabra **aabbba**.

b) Da una derivación a la derecha de la misma palabra del apartado (a).

c) Da una derivación que no sea ni a la derecha ni a la izquierda de la misma palabra del apartado (a).

d) Describe L(G).

2. Sea G una gramática independiente del contexto cuyo conjunto de reglas es el siguiente:

S → ASB | ε

A → **a**A | ε

B → **b**B | ε

a) Da una derivación a la izquierda y una derivación a la derecha de la palabra **aaabb**.

b) Construye el árbol de derivación de alguna de las derivaciones anteriores.

c) Demuestra que G es ambigua.

d) Construye una gramática no ambigua equivalente a G.

e) Describe L(G). ¿Es regular este lenguaje?

3. ¿Qué lenguaje genera una gramática G = (N, Σ, S, P) donde N = {S, A} Σ = { **a, b, c, d** } y P es cada uno de los conjuntos siguientes?

a) S → **aa**SA | ε
A → **b**A | **b**

b) S → **a**S | **b**S | A
A → **c**A | **c** | S

c) S → **a**S**bb** | A
A → **c**A | **c**

d) S → **ab**S**dc** | **c**
A → **cd**A**ba** | ε

4. Sea G = (N, Σ, S, P) donde N = { S }, Σ = { **a**, **b** } y P = { S → **a**S**b** | **a**S**a** | **b**S**b** | **b**S**a** | **ε** }. Demuestra que L(G) es un lenguaje regular.

5. Demuestra que los siguientes lenguajes son independientes del contexto buscando gramáticas de tipo adecuado que los generen.

a) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j : i, j \geq 1, i \neq j \}$

b) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^i\mathbf{c}^j\mathbf{d}^j : i, j \geq 1 \}$

c) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^j\mathbf{d}^i : i, j \geq 1 \}$

d) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k : i, j \geq 1, i \neq j \vee j \neq k \}$

e) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k : i, j \geq 1, i = j \vee j = k \}$

f) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^{2j+i} : i, j \geq 1 \}$

g) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k : j > i+k \}$

h) $\{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* : |\mathbf{w}|_{\mathbf{a}} + 1 = |\mathbf{w}|_{\mathbf{b}} \}$

i) $\{ \mathbf{w} \in L(\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*) : |w|_{\mathbf{a}} = |w|_{\mathbf{b}} \}$

j) { **w** ∈ {**a**, **b**}* : **w** contiene al menos un prefijo con más **b**'s que **a**'s }

k) $\{ x\mathbf{c}y : x, y \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \wedge x^R$ es subpalabra de $y \}$

l) $\{ u\mathbf{a}w\mathbf{b} : u, w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \wedge |u| = |w| \}$

m) $\{ w_1\mathbf{c}w_2\mathbf{c}\ldots\mathbf{c}w_k\mathbf{cc}w_j^R : k \geq 1, k \geq j \geq 1, w_i \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^+$ para $i = 1..k \}$

n) $\{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^m\mathbf{c}^{m+n} : n, m \geq 0\}$

6. (**Ejercicio especial**) Construye una gramática independiente del contexto que genere cada uno de los siguientes lenguajes:

6.1 expresiones regulares sobre el alfabeto {**a**, **b**}

6.2 listas de palabras sobre el alfabeto {**a**, **b**}, por ejemplo **(aa, bab, aaba)**

7. Sea G = (N, Σ, S, P) la gramática cuyas reglas de producción son:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{b} \mid \mathbf{a}A \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow B\mathbf{b} \mid \varepsilon$$

a) Describe el lenguaje generado por dicha gramática.

b) Esta gramática es ambigua. ¿Por qué?

c) Encuentra otra gramática no ambigua equivalente.

8. Dados los lenguajes $L_1 = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n\mathbf{c}^m : n, m \geq 0\}$ y $L_2 = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^m\mathbf{c}^m : n, m \geq 0\}$:

a) Construye una gramática G_1 que genere el lenguaje L_1 y otra G_2 que genere el lenguaje L_2.

b) A partir de esas dos gramáticas construye una gramática G que genere el lenguaje $L_1 \cup L_2$.

c) Prueba que G es ambigua.

d) ¿Cómo sabemos que lo era antes incluso de construirla?

9. (**Ejercicio especial**) Dado el lenguaje $L = \{ x \bullet y \ : \ x, y \in \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}^* \ \wedge \ |x| = |y| \ \wedge \ x \neq y \}$. Encuentra una gramática independiente del contexto que lo genere, explicando adecuadamente su construcción.

Indicación: Para que una palabra de longitud par sea del lenguaje, sus dos mitades **x** e **y** deben ser distintas al menos en un símbolo. Concentra tus esfuerzos en asegurar la existencia de ese símbolo diferenciador.

10. Dada la gramática que genera un lenguaje sobre el alfabeto {**a**, **e**, **if**, **then**, **else**} y cuyas producciones son las siguientes

S → **a** | **if e then** S | **if e then** S **else** S

a) Demuestra que es ambigua

b) Da una gramática equivalente no ambigua que respete el convenio habitual en lenguajes de programación, es decir, que haga corresponder cada **else** con el **if** más cercano.

11. (**Ejercicio especial**) Dadas dos gramáticas sobre el alfabeto { **(** , **)** , **[** , **]** , **a** } con reglas:

i) S → **a** | **(** S **)** | SS

ii) S → **a** | **(** S **)** | **[** S **]** | SS

a) Demuestra que son ambiguas

b) Da dos gramáticas equivalentes no ambiguas.

12. Demuestra que ningún lenguaje regular es ambiguo.

Sobre APs (autómatas con pila)

13. Considera el autómata con pila $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ con $Q = \{ q_0 , q_f \}$; $F = \{q_f\}$; $\Gamma = \{ A \}$; $\Sigma = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}$ y δ definido como sigue:

$\delta (q_0, \mathbf{a}, \perp) = \{ (q_0, A) , (q_f, \varepsilon) \}$ $\delta (q_f, \mathbf{a}, A) = \{ (q_f, \varepsilon) \}$

$\delta (q_0, \mathbf{a}, A) = \{ (q_0, AA) , (q_f, A) \}$ $\delta (q_f, \mathbf{b}, A) = \{ (q_f, \varepsilon) \}$

$\delta (q_0, \mathbf{b}, \perp) = \{ (q_0, A) \}$ $\delta (q_0, \mathbf{b}, A) = \{ (q_0, AA) \}$

a) Da todos los cómputos posibles de M para la palabra **aba**

b) Demuestra que **aba**, **aa**, **abb** no pertenecen a L(M) y que **baa**, **bab**, **baaaa** pertenecen.

c) Describe L(M) en castellano.

14. Construye un autómata con pila para cada uno de los siguientes lenguajes:

a) $\{ \mathbf{a}^n\mathbf{b}^n : n \geq 0 \}$

b) $\{ \mathbf{a}^n\mathbf{b}^{2n} : n \geq 0 \}$

c) $\{ \mathbf{a}^{2n}\mathbf{b}^n : n \geq 0 \}$

d) $\{ \mathbf{a}^m\mathbf{b}^n : m \leq n \leq 2*m \}$

e) $\{ \mathbf{a}^n\mathbf{b}^m : m \leq n \leq 2*m \}$

15. Construye un autómata con pila para cada uno de los siguientes lenguajes:

a) $\{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* : \mathbf{w}$ es capicúa $\}$

b) $\{ \mathbf{a}^{2*i+1}\mathbf{b}^i : i \geq 0 \}$

c) { palabras sobre el alfabeto {**(** , **)**} con paréntesis balanceados }
Por ejemplo, "**(())()(())**" es una palabra válida, "**()())(**" y "**())(()**" no son palabras válidas.

d) { expresiones regulares válidas sobre el alfabeto { **a**, **b** } }

e) El lenguaje generado por la gramática G = (N, Σ, S, P) donde N = { S }; $\Sigma = \{ (\, ,\,)\, ,\, [\, ,\,] \}$ y $P = \{ S \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \mid SS \mid [S] \mid (S) \}$

f) $\{ \mathbf{w} \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* : |\mathbf{w}|_{\mathbf{a}} = 2*|\mathbf{w}|_{\mathbf{b}} \}$

g) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k : i, j, k \geq 0,\ i = j \vee j = k \}$

h) $\{ \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k : i, j, k \geq 0,\ i+k = j \}$

i) $\{ \mathbf{a}^{i+j}\mathbf{b}^i\mathbf{c}^j : i, j \geq 0 \}$

j) $\{ \mathbf{a}^m\mathbf{b}^n : m \neq n \}$

16. Sean $L_1 = \{ \mathbf{a}^{2*i}\mathbf{b}^{3*i} : i \geq 0 \}$ y $L_2 = \{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* : \mathbf{w}$ tiene al menos un prefijo con más **b**´s que **a**´s}

a) Construye autómatas con pila que acepten ambos lenguajes

b) Da los cómputos asociados a las cadenas **aabbb** y **ababbaa** en cada uno de los autómatas construidos.

17. (**Ejercicio especial**) Construye un autómata con pila que reconozca el lenguaje generado por la gramática cuyas producciones son :

$S \rightarrow \mathbf{a}AA \qquad A \rightarrow \mathbf{a}S \mid \mathbf{b}S \mid \mathbf{a}$

Da una derivación y un cómputo para alguna palabra generada por la gramática.

18. Sea el lenguaje L = {**w** ∈ Σ^* : 2 $|w|_{ab} = |w|_a$} definido sobre el alfabeto Σ = {**a**, **b**}.

a) L es independiente del contexto. Explica cómo construir un autómata con pila que lo reconozca.

b) Construye el autómata con pila M que reconoce este lenguaje siguiendo las ideas del apartado anterior.

c) Escoge dos transiciones de M, de distinto tipo, e indica cuáles serían las reglas de producción que se obtendrían al aplicar el algoritmo que construye una gramática equivalente.

19. (**Ejercicio especial**) Considera el alfabeto Σ={ **(** , **)** } y la siguiente definición inductiva del lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$

Paso básico: **( )** ∈ L

Paso de inducción: $\forall k \in N \quad x_1,\ldots,x_k \in L \Rightarrow (x_1 \ldots x_k) \in L$

a) Demuestra que no es un lenguaje regular

b) Demuestra que L es un lenguaje independiente del contexto por el método que prefieras.

Sobre simplificación de gramáticas y FNG

20. Simplifica las gramáticas cuyas producciones vienen dadas a continuación:

a)

S → AA | B**b**
C → **a**
B → **b**
A → **a**B**a**D | SBB**b**

b)

S → A | **a**B**a** | A**b**A
A → A**a** | ε
B → B**b** | BC
C → CB | CA | **b**B

c)

S → A | B
A → C | D
B → D | E
C → S | **a** | ε
D → S | **b**
E → S | **c** | ε

d)

S → A | AA | AAA
A → AB**a** | AC**a** | **a**
B → AB**a** | A**b** | ε
C → C**ab** | CC
D → CD | C**d** | CE**a**
E → **b**

e)

$S \rightarrow ABaC$

$A \rightarrow AB$

$B \rightarrow \mathbf{b} \mid \varepsilon$

$C \rightarrow D \mid \varepsilon$

$D \rightarrow \mathbf{d}$

f)

$S \rightarrow A\mathbf{a} \mid B\mathbf{a} \mid B$

$A \rightarrow A\mathbf{a} \mid \varepsilon$

$B \rightarrow \mathbf{a}A \mid BB \mid \varepsilon$

21. (**Ejercicio especial**) Sea G = (N, Σ, S, P) la gramática cuyas reglas de producción son:

$S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{a} \mid \mathbf{b}S\mathbf{b} \mid C \mid \mathbf{a}DA\mathbf{b} \mid \mathbf{b}AD\mathbf{a}$

$A \rightarrow \mathbf{a}A \mid \mathbf{b}A$

$B \rightarrow \mathbf{a}B \mid \mathbf{b}B \mid AB \mid BAB \mid \varepsilon$

$C \rightarrow \mathbf{a}B\mathbf{b} \mid \mathbf{b}BB\mathbf{a} \mid CA \mid ACA$

$D \rightarrow \mathbf{a}D \mid \mathbf{b}D\mathbf{b} \mid \varepsilon$

a) Simplifica la gramática.

b) Describe razonadamente el lenguaje generado por la misma.

22. Considera la gramática independiente de contexto cuyas reglas vienen dadas a continuación:

$S \rightarrow \mathbf{b} \mid \mathbf{b}HF \mid \mathbf{bH} \mid \mathbf{bF}$

$H \rightarrow \mathbf{b}H\mathbf{c} \mid \mathbf{bc}$

$G \rightarrow \mathbf{d}G \mid \mathbf{d}$

$F \rightarrow \mathbf{d}F\mathbf{e} \mid \mathbf{de} \mid G$

a) Construye una gramática equivalente disminuyendo el número de reglas. Para ello introduce producciones nulas.

b) Razona cuál es el lenguaje generado por la gramática.

c) Teniendo en cuenta la estructura del lenguaje generado por la gramática, construye otra gramática equivalente a la del apartado **a)** con solo seis reglas de producción.

23. Da gramáticas en FNG equivalentes a las gramáticas cuyas producciones corresponden a los siguientes apartados

a)

$$\begin{aligned} S &\to \mathbf{a}BAA\mathbf{b} \mid \mathbf{b}ABB\mathbf{a} \mid \mathbf{a}C\mathbf{a} \\ A &\to \mathbf{a}B\mathbf{a} \mid B \mid \mathbf{a} \mid \varepsilon \\ B &\to \mathbf{b}A\mathbf{b} \mid A \mid \mathbf{b} \mid \varepsilon \\ C &\to \mathbf{a}C\mathbf{a} \mid \mathbf{b}D\mathbf{b} \\ D &\to \mathbf{a}C\mathbf{a} \mid \mathbf{b}D\mathbf{b} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S &\to AB \\ A &\to BB \mid CC \\ B &\to AD \mid CA \\ C &\to \mathbf{a} \\ D &\to \mathbf{b} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to \mathbf{a}B \mid \mathbf{b}S \mid \mathbf{b} \\ B &\to AB \mid B\mathbf{a} \mid CC \\ C &\to AS \mid \mathbf{b} \mid \varepsilon \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} S &\to B\mathbf{a} \mid A\mathbf{b} \\ A &\to S\mathbf{a} \mid AA\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \\ B &\to S\mathbf{b} \mid BB\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \end{aligned}$$

24. Sea una gramática $G = (N, \Sigma, S, P)$ cuyas reglas de producción son de la forma $\mathbf{A \to wB}$ o de la forma $\mathbf{A \to w}$ con $A, B \in N$ y $w \in \Sigma^*$. A pesar de no ser una gramática lineal a la derecha podemos asegurar que el lenguaje que genera la gramática es regular. Razona por qué.

Sobre gramáticas y/o autómatas

25. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando tu respuesta de forma breve pero convincente.

a) La derivación de una palabra por una gramática en FNG tiene tantos pasos como su aceptación por un AP.

b) Dado un autómata con pila existe una única gramática equivalente.

c) El símbolo inicial de cualquier gramática siempre es un símbolo útil.

d) Si M es un autómata con pila que no modifica la pila en ningún momento, y además su estado inicial no es final, entonces necesariamente $L(M) = \emptyset$.

e) Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática independiente de contexto y $\alpha \Rightarrow \beta$ una derivación inmediata en G, tal que $|\alpha| = |\beta|$. Entonces necesariamente $\alpha = \delta A\gamma$ y $\beta = \delta s\gamma$ con $\delta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*$, $A \in N$, $s \in \Sigma$.

f) Todo lenguaje regular es independiente de contexto y ningún lenguaje independiente de contexto es regular.

g) Sea G=(N, Σ, S, P) una gramática independiente del contexto en Forma Normal de Greibach. Sea $S \overset{+}{\Rightarrow} \delta \Rightarrow \gamma$ una derivación en G. El número de símbolos terminales en γ puede ser menor que el número de terminales en δ.

h) Si G es una gramática tal que $\varepsilon \notin L(G)$, G no puede tener producciones nulas.

i) Las gramáticas regulares no tienen Forma Normal de Greibach.

26. Sea el lenguaje $L = \{ x \bullet y: x,y \in \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}^* \wedge |x| = |y| \wedge x \neq y^R \}$. Demuestra que es **independiente del contexto**. Explica detallada y razonadamente el modelo elegido para probarlo *antes de construirlo*.

27. Sea el lenguaje formado por aquellas palabras sobre el alfabeto {**a**, **b**} que tienen longitud par y tales que, o bien coinciden los dos símbolos centrales o bien coinciden los dos de los extremos.

a) Construye una gramática independiente de contexto que lo genere.

b) Construye un autómata con pila que lo reconozca. Puedes construirlo directamente (con las explicaciones oportunas) u obtenerlo del apartado anterior mediante algún algoritmo de transformación.

28. Sea el lenguaje $L = \{ \mathbf{a}^n\mathbf{b}^n$: n no es múltiplo de 5 }.

a) Demuestra que es independiente de contexto construyendo un autómata que lo reconozca, y explicando detalladamente su funcionamiento.

b) Sea ahora $L = \{ a^nb^n$: n es múltiplo de 5 .}.¿Cómo modificarías el autómata construido en el apartado anterior para que acepte este lenguaje?

29. Sea $L = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^m: n = m$ ó $n = 3m \}$.

a) Demuestra que L es un lenguaje independiente del contexto construyendo una gramática que lo genere.

b) Demuestra que L es un lenguaje independiente del contexto construyendo un autómata con pila que lo reconozca. Puedes construirlo directamente (con las explicaciones oportunas) u obtenerlo del apartado anterior mediante algún algoritmo de transformación.