ALGEBRA

1º.- Sea $f:(R^3,+,.) \to (R^2,+,.)$ una aplicación lineal, que respecto a las bases $B_1=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ y $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ tiene por matriz asociada:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se eligen nuevas bases $B_3=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $B_4=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$ siendo

$$\begin{cases} \vec{u}_1=\vec{e}_2+\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_1=\dfrac{1}{2}(\vec{w}_1+\vec{w}_2) \\ \vec{v}_2=\dfrac{1}{2}(\vec{w}_1-\vec{w}_2) \end{cases}$$

Hallar la matriz de “f” respecto a las bases B_3 y B_4.

2º.- Estudiar el sistema, según los distintos valores de los parámetros que contiene:

$$\begin{cases} ax+by+bz=1 \\ bx+ay+bz=0 \\ bx+by+az=2b \end{cases} \quad a,b\in R.$$

3º.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A (1, 0, 0), B (0, 2, 0) y corta al eje OZ en un punto C, tal que el área del triángulo ABC es $\sqrt{6}\,u^2$.

4º.- Estudiar para que valores de “**a**” la siguiente matriz es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad a\in R.$$

5º.- a) Clasificar las cónicas $\lambda^2x^2+y^2+2xy-2\lambda x+1=0 \quad \lambda\in R$.

b) $\lambda=1$ Hallar la ecuación reducida.

Soluciones

1º.- La matriz de cambio de B_1 a B_3 es: $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Despejando las "w" en función de las "v" tenemos la matriz de cambio de B_2 a B_4 que es Q.

$$Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es:

$$Q^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&6\\1&3&-4\end{pmatrix}.$$

2º.-

$$A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}a&b&b&1\\b&a&b&0\\b&b&a&2b\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=1^oC+2^oC+3^oC=\begin{vmatrix}a+2b&b&b\\a+2b&a&b\\a+2b&b&a\end{vmatrix}=$$

$$(a+2b)\begin{vmatrix}1&b&b\\1&a&b\\1&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1&b&b\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2.$$

1º Caso:

si $a\neq b$ y $a\neq 2b\Rightarrow r(A)=3=r(B)=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Determinado.

2º Caso: a=b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}b&b&b&1\\b&b&b&0\\b&b&b&2b\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\text{i)}\ \ b=0\ \ \ r(A)=0, r(B)=1\Rightarrow \text{Incompatible.}\\ \text{ii)}\ b\neq 0\ \ \ r(A)=1, r(B)=2\Rightarrow \text{Incompatible.}\end{cases}$$

3º Caso: a=-2b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2b & b & b & 1 \\ b & -2b & b & 0 \\ b & b & -2b & 2b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } b=0 \ r(A)=0,\ r(B)=1 \Rightarrow \text{Incompatible.} \\ \text{ii) } b\neq 0 \ r(A)=2 \text{ y el } r(B)=\begin{cases} 2 & \text{si } b=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{Comp}-\text{Indet.} \\ 3 & \text{si } b\neq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{Incompatible} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Pues } \begin{vmatrix} b & b & 1 \\ -2b & b & 0 \\ b & -2b & 2b \end{vmatrix} = 1^{\text{o}}F+2^{\text{o}}F+3^{\text{o}}F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+2b \\ -2b & b & 0 \\ b & -2b & 2b \end{vmatrix} = 3b^2(1+2b).$$

3º.- El punto C tendrá de coordenadas (0,0,c).

$$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0),\ \ \overrightarrow{AC}=(-1,0,c) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix} = 2c\,\vec{i}+c\,\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4c^2+c^2+4}=\sqrt{6} \Rightarrow 5c^2+4=24 \Rightarrow c=\pm 2.$$

El punto será el (0,0,2).

Plano determinado por tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+y+z-2=0.$$

4º.-

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a^2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-a^2\right) = (2-\lambda)(1-\lambda-a)(1-\lambda+a)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ 1\text{-}a \\ 1+a \end{cases}$$

1º Caso: a=1

$$\begin{cases} \lambda = 2 \text{ doble} \Rightarrow r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim\ker(f-2e) = 1 \Rightarrow \text{No diagonalizable.} \\ \lambda = 0 \text{ simple} \end{cases}$$

2º Caso: a=-1

$$\begin{cases} \lambda = 2 \text{ doble} \Rightarrow r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim\ker(f-2e) = 1 \Rightarrow \text{No diagonalizable.} \\ \lambda = 0 \text{ simple} \end{cases}$$

3º Caso: a=0

$$\begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \Rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim\ker(f-1e) = 1 \Rightarrow \text{No diagonalizable.} \\ \lambda = 2 \text{ simple} \end{cases}$$

4º Caso: La matriz es diagonalizable $\forall a \neq \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$ pues los valores propios son simples.

5º.- a) $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - \lambda^2 = -1 \neq 0$.

Son cónicas **no degeneradas**.

$$A_{33}=\lambda^2-1\quad\begin{cases}(-\infty,-1)\cup(1,\infty) & A_{33}>0\Rightarrow \text{Elipses.}\\ (-1,1) & A_{33}<0\Rightarrow \text{Hipérbolas.}\\ \lambda=1 \text{ y } \lambda=-1 & \text{Parábolas}\end{cases}$$

b) Para $\lambda=1$, como hemos visto se trata de una parábola.

$$C_1y^2+2C_2x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&C_2\\0&C_1&0\\C_2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{los invariantes}\begin{cases}|A|=-1=-C_2{}^2C_1\\ a_{11}+a_{22}=2=C_1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Las parábolas son:}\begin{cases}2y^2+2\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0\Rightarrow 2y^2+\sqrt{2}\,x=0\\[2ex] 2y^2-2\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0\Rightarrow 2y^2-\sqrt{2}\,x=0\end{cases}$$