ALGEBRA

1º.- $f : R^3 \rightarrow R^3$ / f(x , y , z) = (x-y , 3x , 4z-x).

a) Clasificar la aplicación lineal.
b) Hallar la matriz asociada a "f" respecto a la base

$B = \{(1, 3, 1), (2, 1, 3), (-1, -1, 2)\}$.

c) Siendo $\vec{a}$ = (-2, -3, 3), hallar las coordenadas de su imagen en dicha base.

2º.- Discutir el sistema, según los distintos valores de los parámetros que contiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + ay + z = 2 \\ -x - y + az = 1 \\ -x - y - z = b \end{cases} \qquad a, b \in R$$

3º.- a) Dado el punto A (2, 0, 1) y la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$, calcular la ecuación de la recta que pasa por A y corta perpendicularmente a "**r**".

b) Hallar la ecuación del plano paralelo al x-2y+3z+4 = 0 sabiendo que el punto A(1, 1, 0) equidista de ambos planos.

4º.- Estudiar para qué valores de "**m**" y "**n**" la matriz $A = \begin{pmatrix} m & n & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & n & m+2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

5º.- Clasificar las siguientes cónicas:

a) $x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 1 = 0$.
b) $-3x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$.

Caso de ser degeneradas hallar las rectas en que se descomponen, en caso contrario obtener la ecuación reducida.

Soluciones

1º.- a) f (1, 0, 0) = (1, 3, -1); f (0, 1, 0) = (-1, 0, 0); f (0, 0, 1) = (0, 0, 4);

La matriz en las bases canónicas será $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$.

La $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 \Rightarrow$ Im(f)=R^3 $\Rightarrow$ la aplicación es Sobre.

Aplicando dim (inicial)= dim(núcleo)+dim(imagen) $\Rightarrow$ dim(núcleo)=0 $\Rightarrow$

la aplicación es Inyectiva.

Conclusión.- es una aplicación Biyectiva, un endomorfismo biyectivo es decir un automorfismo.

b) La nueva matriz $B = P^{-1}AP$ siendo P la matriz de cambio de base de la canónica a la base dada.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -7 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow B = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -34 & -47 & 12 \\ 17 & -9 & -27 \\ -34 & -48 & -42 \end{pmatrix}$$

.

c) $f(\vec{a}) = (1,-6,14)$ .Sabemos que: $P\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 33 \\ 53 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

2º.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & b \end{pmatrix}$**.**

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & b \end{vmatrix} = \text{sumando la 1ª fila a todas las demás} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a+1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{vmatrix} =$$

$= (a+1)^2(b+3).$

1º Caso.- $a \neq -1$ y $b \neq -3$**,** r(B)=4>r(A) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

2º Caso.- a=-1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \ \ \forall b.$$

Sistema Incompatible.

3º Caso.- b=-3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2.$$

I) a=-1 estudiado anteriormente. Sistema Incompatible
II) $a \neq -1$ r(A)=3=R(B)= nº de incógnitas. Sistema Compatible Determinado.

3º.- a) El punto de corte será un punto de la recta por ejemplo:

$$B(x_0, y_0, z_0) \begin{cases} x_0 = 1 + 2\lambda_1 \\ y_0 = -1 + 3\lambda_1 \\ z_0 = -2 + 2\lambda_1 \end{cases} \qquad \vec{AB} = (-1 + 2\lambda_1, -1 + 3\lambda_1, -3 + 2\lambda_1)$$

Este vector será perpendicular al director de la recta, por tanto su

Producto escalar cero.

$$2(-1+2\lambda_1)+3(-1+3\lambda_1)+2(-3+2\lambda_1)=0 \Rightarrow 17\lambda_1=11 \Rightarrow \lambda_1=\frac{11}{17}.$$

La recta pedida pasa por el A (2, 0, 1) y tiene como vector director

$(\frac{5}{17},\frac{16}{17},\frac{-29}{17})$, también el (5,16,-29).

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{16}=\frac{z-1}{-29}.$$

b) La distancia del punto A (1, 1, 0) al plano será:

$$\frac{|1.1-2.1+3.0+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Los planos paralelos serán x-2y+3z+D=0, como la distancia al punto A debe ser la misma:

$$\frac{|1.1-2.1+3.0+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow |-1+D|=3\begin{cases}-1+D=3 \Rightarrow D=4\\ -1+D=-3 \Rightarrow D=-2\end{cases}$$

El plano pedido es x-2y+3z-2=0.

4º.- $\begin{vmatrix} m-\lambda & n & 2 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & n & m+2-\lambda \end{vmatrix} = 1^a C+3^a C = \begin{vmatrix} m-\lambda+2 & n & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ m+2-\lambda & n & m+2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$(m+2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & n & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & n & m+2-\lambda \end{vmatrix} = 3^a F-1^a F = (m+2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & n & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & m-\lambda \end{vmatrix} =$$

$=(m+2-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda)$. Valores propios $\begin{cases}\lambda=m+2\\ \lambda=2\\ \lambda=m\end{cases}$

1º Caso.- $m \neq \begin{cases} 0 \\ y \\ 2 \end{cases}$ los valores son simples luego siempre diagonalizable.

2º Caso.- m=0, los valores propios son $\lambda = 0$ simple y $\lambda = 2$ doble.

$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & n & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}$ su rango depende de "n"

I) n=0 r(A-2I)=1 $\Rightarrow$ dimKer(f-2e)=2 $\Rightarrow$ Es diagonalizable.
II) $n \neq 0$ r(A-2I)=2 $\Rightarrow$ dimKer(f-2e)=1 $\Rightarrow$ No es diagonalizable.

3ºCaso.- m=2, los valores propios son $\lambda = 4$ simple y $\lambda = 2$ doble.

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & n & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & n & 2 \end{pmatrix}$ su rango es dos y no depende de "n".

La dimKer(f-2e)=1 $\Rightarrow$ No es diagonalizable.

5º.- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -14$. Cónica no degenerada.

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$. Es una elipse.

Ecuación reducida $C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0$.

Invariantes $\begin{cases} C_1.C_2.C_3 = -14 \\ C_1.C_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -7 \\ C_1 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow C_2 = 2 - \sqrt{2} \\ C_1 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow C_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

Sustituyendo:

i) $(2+\sqrt{2})x^2+(2-\sqrt{2})y^2=7 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\dfrac{7}{2+\sqrt{2}}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{7}{2-\sqrt{2}}}=1.$

ii) $(2-\sqrt{2})x^2+(2+\sqrt{2})y^2=7 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\dfrac{7}{2-\sqrt{2}}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{7}{2+\sqrt{2}}}=1.$

b) $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0$. Cónica degenerada.

Como r(A)=2, son dos rectas.

$$y^2+y(-2x-4)+(-3x^2+8x+3)=0$$
$$y^2-2y(x+2)+(-3x^2+8x+3)=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$y=(x+2)\pm\sqrt{(x+2)^2-(-3x^2+8x+3)}=(x+2)\pm\sqrt{4x^2-4x+1}=$$

$$=(x+2)\pm\sqrt{(2x-1)^2}=\begin{cases}(x+2)+(2x-1)=3x+1\\(x+2)-(2x-1)=-x+3\end{cases}$$

La ecuación dada queda descompuesta en:

(y-3x-1).(y+x-3)=0.