FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

1º.- Dada la aplicación lineal:

$$f:(R^4,+,.)\to(R^2,+,.)$$
$$(x,y,z,t)\to(x-y,z)$$

a) Clasificarla.
b) Hallar la matriz de f(x) cuando en el espacio inicial tenemos la base canónica y en el final la base $B_2=\{(2,3),(-1,1)\}$.
c) Lo mismo cuando en el inicial tenemos la base $B_3=\{(2,0,0,0),(0,1,-1,0),(1,0,1,2),(-1,0,1,0)\}$ y en el final $B_4=\{(1,1),(0,2)\}$.

2º.- Discutir el sistema según los distintos valores de los parámetros que contiene:

$$\left.\begin{array}{l} x+\;\;y+\;\;z=a \\ x+ay+a^2z=b \\ x+a^2y+az=b^2 \end{array}\right\} \quad a,b\in R.$$

3º.- Sea la forma cuadrática sobre R^3:

$$\varphi(\vec{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3.$$

a) Clasificarla.
b) Diagonalizarla ortogonalmente.
c) Descomponerla en suma de cuadrados.
d) Poner las nuevas componentes en función de las antiguas.

4º.- Sea el haz de cónicas: $(2+\lambda)x^2-y^2+4y-(1+3\lambda)=0 \qquad \lambda\in R$ **.**

a) Clasificar, según los distintos valores del parámetro λ **.**
b) En caso de cónica degenerada, hallar las rectas.
c) Para $\lambda=0$, obtener la ecuación reducida.

Soluciones

1º.- a) $\operatorname{Ker}(f)=\{(x,y,z,t)/f(x,y,z,t)=(0,0)\}. \Rightarrow (x-y,z)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$

Luego $\operatorname{Ker}(f)=\{(x,x,0,t)\}=L\{(1,1,0,0),(0,0,0,1)\}\Rightarrow \dim\operatorname{Ker}(f)=2$.

La aplicación lineal no es inyectiva.

$\dim R^4=\dim\operatorname{Ker}(f)+\dim\operatorname{Im}(f)\Rightarrow\dim\operatorname{Im}(f)=2.$ Es SOBRE.

Se trata de una aplicación lineal u homomorfismo " Sobre".

b) $f(\vec{e}_1)=f(1,0,0,0)=(1,0)=\alpha(2,3)+\beta(-1,1)\begin{cases}2\alpha-\beta=1\\ 3\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{5},\quad\beta=-\frac{3}{5}.$

$f(\vec{e}_2)=f(0,1,0,0)=(-1,0)=\gamma(2,3)+\delta(-1,1)\begin{cases}2\gamma-\delta=-1\\ 3\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\gamma=-\frac{1}{5},\quad\delta=\frac{3}{5}.$

$f(\vec{e}_3)=f(0,0,1,0)=(0,1)=\mu(2,3)+\omega(-1,1)\begin{cases}2\mu-\omega=0\\ 3\mu+\omega=1\end{cases}\Rightarrow\mu=\frac{1}{5},\qquad\omega=\frac{2}{5}.$

$f(\vec{e}_4)=f(0,0,0,1)=(0,0)=\eta(2,3)+\xi(-1,1)\begin{cases}2\eta-\xi=1\\ 3\eta+\xi=0\end{cases}\Rightarrow\eta=0,\quad\xi=0.$

$$M(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0\end{pmatrix}.$$

c) $f(2,0,0,0)=(2,0)=\alpha(1,1)+\beta(0,2)\begin{cases}\alpha=2\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=2,\quad\beta=-1.$

$f(0,1,\text{-}1,0)=(\text{-}1,\text{-}1)=\gamma(1,1)+\delta(0,\text{-}2)\begin{cases}\gamma=-1\\ \gamma+\delta=\text{-}1\end{cases}\Rightarrow\gamma=-1,\quad\delta=0.$

$f(1,0,1,2)=(1,1)=\mu(1,1)+\omega(0,2)\begin{cases}\mu=1\\ \mu+\omega=1\end{cases}\Rightarrow\mu=1,\quad\omega=0.$

$f(\text{-}1,0,1,0)=(\text{-}1,1)=\eta(1,1)+\xi(0,2)\begin{cases}\eta=-1\\ \eta+\xi=0\end{cases}\Rightarrow\eta=\text{-}1,\quad\xi=1.$

$$M(f)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2º.- $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & a & a^2 & b\\ 1 & a^2 & a & b^2\end{pmatrix}.$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&a^2&a\end{vmatrix}=\text{restando la 1ª fila a la 2ª y 3ª}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&a^2-1\\0&a^2-1&a-1\end{vmatrix}=(a-1)^2\begin{vmatrix}1&a+1\\a+1&1\end{vmatrix}=$$

$$(a-1)^2\left[1-(a+1)^2\right]=(a-1)^2\left[1-(a+1)\right]\left[1+(a+1)\right]=(a-1)^2(-a)(a+2)\,.$$

1º Caso.- Si $a\neq 1,0$ y $-2\Rightarrow r(A)=r(B)=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Determinado**.**

2º Caso.- a=1.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&b\\1&1&1&b^2\end{pmatrix}$$

a) Si b=1 $\Rightarrow r(A)=r(B)=1<$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

b) Si $b\neq 1$ $\begin{cases}r(A)=1\\r(B)=2\end{cases}$ Sistema Incompatible.

3º Caso.- a=0.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&b\\1&0&0&b^2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow r(A)=2\,;\qquad \begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&b\\1&0&b^2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&b\\1&b^2\end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix}1&1\\1&b\end{vmatrix}=-b(b-1).$$

a) Si $b\neq 0$ y $1\Rightarrow r(B)=3\neq r(A)\Rightarrow$ Incompatible**.**

b) Si b=0 $\Rightarrow r(A)=r(B)=2<$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

c) Si b=1 $\Rightarrow r(A)=r(B)=2<$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

4º Caso.- a=-2.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&4\\1&4&-2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&-2&4&b\\1&4&-2&b^2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 4 & b^2 \end{vmatrix} = \text{restando la 1ª fila a la 2ª y 3ª}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & b+2 \\ 0 & 3 & b^2+2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -1 & b+2 \\ 1 & b^2+2 \end{vmatrix} = 3(-b^2-2-b-2) = 3(-b^2-b-4).$$

$b^2+b+4=0$ no tiene solución **real** $\Rightarrow$ nunca se anula $\Rightarrow r(B)=3$.
Luego el sistema es Incompatible.

3º.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{sumando a la 1ª columna todas las}$$

demás;

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{restando la 1ª fila a la 2ª y 3ª} =$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 & \text{simple} \\ \lambda = -1 & \text{doble} \end{cases}$$

Por ser matriz simétrica siempre es diagonalizable.

a) Como los valores propios son -1 y 5, es **Indefinida.**

b) Hallando los vectores propios:

$$\lambda = 5 \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x+2y=-2z \\ 2x-4y=-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Un vector propio el (1,1,1).

$$\lambda=-1\quad \begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 2x+2y+2z=0\Rightarrow x=-y-z\,.$$

Como hay que sacar dos vectores propios "ortogonales" uno puede ser el (-1,1,0)

El otro deberá cumplir que $(-y-z,y,z).(-1,1,0)=0\Rightarrow y+z+y=0=z=-2y\Rightarrow$

(y, y, -2y) tomaremos el (1, 1,-2).

La base ortogonal será $\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,1,-2)\}$ dividiendo entre sus módulos respectivos tendremos la base "ortonormal":

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}.$$

Así la matriz de cambio de base P será una matriz "ortogonal" $(P^{-1}=P^t)$.

$$D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\Rightarrow D=P^t.A.P$$

c) $\varphi(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

d) $$P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+x_2)\\ y_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3)\end{cases}$$

4º.- a)

$$A=\begin{pmatrix}2+\lambda&0&0\\0&-1&2\\0&2&-(1+3\lambda)\end{pmatrix},\ |A|=(2+\lambda)[(1+3\lambda-4]=(2+\lambda)(3\lambda-3).$$

a1) $\lambda = -2 \Rightarrow r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Dos rectas.

a2) $\lambda = 1 \Rightarrow r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Dos rectas.

a3) $\lambda \neq -2$ y $1 \Rightarrow$ Cónica no degenerada.

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2+\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2-\lambda \begin{cases} (-\infty,-2) \Rightarrow A_{33} > 0 \Rightarrow \text{Elipses} \\ (-2,1) \cup (1,\infty) \Rightarrow A_{33} < o \Rightarrow \text{Hipérbolas} \end{cases}$$

b) Para $\lambda = -2 \Rightarrow -y^2 + 4y + 5 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{-1} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 5 \end{cases}$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{3}\,x \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}\,x.$

c) Para $\lambda = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = -6 \Rightarrow$ Cónica no degenerada $A_{33} = -2 < 0 \Rightarrow$ Hipérbola

Ecuación reducida: $c_1x^2 + c_2y^2 + c_3 = 0. \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$

Poniendo los invariantes $\begin{cases} |A| = -6 = c_1.c_2.c_3 \\ A_{33} = -2 = c_1.c_2 \\ a_{11} + a_{22} = c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$

$c_3 = 3,$ $\qquad c_1 = 1 - c_2 \Rightarrow (1-c_2).c_2 = -2 \Rightarrow c_2{}^2 - c_2 - 2 = 0.$

$c_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_1 = 2 \end{matrix}$

1º Caso: $-x^2 + 2y^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3 = x^2 - 2y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1.$

2º Caso: $2x^2 - y^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3 = -2x^2 + y^2 \Rightarrow \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{x^2}{\frac{3}{2}} = 1.$