1º.- Sean los espacios vectoriales:

$E = L\{(1,0,a),(1,1,0)\}$ y $F = L\{(1,b,2),(2,4,4),(3,6,6)\}$ $a,b \in R$.

Estudiar para que valores de **"a"** y **"b"** los subespacios de $(R^3,+,.)$ E y F son suplementarios.

2º.- Sea: $f:(R^3,+,.) \to (R^2,+,.)$ una aplicación lineal, que respecto a las bases $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tiene por matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Se eligen unas nuevas bases: $B_1' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$; $B_2' = \{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ siendo:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1' = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} \vec{u}_1' = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \\ \vec{u}_2' = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \end{array}\right\}$$

a) Hallar la matriz asociada a **"f"** respecto a las bases B_1 y B_2'.
b) Hallar la matriz asociada a **"f"** respecto a las bases B_1' y B_2'.

3º.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular A^n utilizando la diagonalización.

4º.- Dada la recta: $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z + 3 = 0$.

a) Hallar la ecuación de la recta r' ,proyección de la recta r sobre el plano π.
b) Calcular la distancia de la recta r al plano π.

5º.- Dada la cónica: $3x^2 - y^2 + 2xy + 2y - 2x - 1 = 0$.

a) Clasificarla.
b) En el caso de ser **degenerada**, calcular las rectas en que se descompone y en el de **no degenerada** hallar su ecuación reducida.

Soluciones

1º.- $\operatorname{rag}\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 2$ pues $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ no depende del valor de "a" $\Rightarrow \dim E = 2.$

Como dim(E+F) debe ser igual a tres y la $\dim(E \cap F) = 0 \Rightarrow \dim F$ debe valer 1.

$$\operatorname{rag}\begin{pmatrix}1 & b & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 3 & 6 & 6\end{pmatrix} \text{depende de "b"} \begin{cases} b = 2 \Rightarrow \text{el rango vale } 1 \Rightarrow \dim F = 1\\ b \neq 2 \Rightarrow \text{el rango vale } 2 \Rightarrow \dim F = 2 \text{(este caso no nos sirve)}\end{cases}$$

Veamos la dim(E+F):

$$\operatorname{rag}\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} = 1^{a}\text{col} - 2^{a}\text{col} = \begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 2 + a \begin{cases} a = -2 \Rightarrow \text{el rango vale } 2 \Rightarrow \dim(E+F) = 2\\ a \neq -2 \Rightarrow \text{el rango vale } 3 \Rightarrow \dim(E+F) = 3\end{cases}$$

E y F serán suplementarios cuando a $\neq$ -2 y b=2.

2º.- P=matriz de cambio de la base B_1 a $B'_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

Q=matriz de cambio de la base B_2 a $B'_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}.$

a) La matriz de la aplicación lineal= $Q^{-1}.A.I \; (P = I)$

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

b) La matriz de la aplicación lineal= $Q^{-1}.A.P$.

$$\begin{pmatrix}0 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}.$$

3º.- $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda)+2] = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$ **.**

Valores propios $\begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = 2 \end{cases}$ **.** Veamos si es diagonalizable:

$\lambda = 1.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x+2y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow \mathrm{Ker}(f-1e) = \{(-y,y,z)/\, x,y \in R\} =$$

$$= L\{(-1,1,0),(0,0,1)\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f-1e)) = 2 = \text{nº de veces que se repite} \Rightarrow \text{diagonalizable}$$

$\lambda = 2.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f-2e) = \{(-2y,y,0)/\, x,y \in R\} = L\{(-2,1,0)\}.$$

Base formada por los vectores propios= $\{(-1,1,0),(0,0,1),\text{-}2,1,0)\}$.

La matriz de cambio de la base canónica a la formada por los vectores propios nos da

la matriz P= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$D^n = P^{-1}.A^n.P \Rightarrow A^n = P.D^n.P^{-1} \quad =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2^{n+1} \\ 1 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} & 0 \\ 1-2^n & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4º.- a) Calcularemos el haz de planos que contienen a la recta:

$(2x-3y+z-1)+\lambda(x-y+2z)=0$, su vector director $\big((2+\lambda),(-3-\lambda),(1+2\lambda)\big)$.

De todos ellos, elegimos el perpendicular al plano π.

$1.(2+\lambda)-2(-3-\lambda)-1(1+2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-7 \Rightarrow$ el plano es: $-5x+4y-13z-1=0$.

La recta solución es la intersección de los planos $\begin{cases} -5x+4y-13z-1=0 \\ x-2y-z+3=0 \end{cases}$

b) Para calcular la distancia de la recta "r" al plano" π " ,veamos su posición:

$$\left.\begin{matrix} 2x-3y=1-z \\ x-y=-2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-5z \\ y=-1-3z \\ z=z \end{cases}$$ pasa por el pto (-1,-1,0) y su vector director (-5,-3,1).

El vector director del plano es perpendicular al de la recta:(1,-2,-1).(-5,-3,1)=0.

La recta es paralela al plano.

La distancia será la de cualquier punto de la recta al plano.

Tomando el (-1,-1,0) $\Rightarrow d(r,\pi)=\dfrac{|-1+2+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ unidades.

5º.- a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ Cónica degenerada.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango es 2 $\Rightarrow$ dos rectas.

b) $-y^2+2y(x+1)+(3x^2-2x-1)=0$.

$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{(x+1)^2+(3x^2-2x-1)}}{-1}=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{4x^2}}{-1}=\frac{-(x+1)\pm 2x}{-1}=$$

$$=(x+1)\mp 2x \Rightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ y=3x+1 \end{cases}$$