FUNDAMENTOS MATEMÁTICO II

1º.- Sea: $A=\{(0,a,-a)/a\in R\}\subset R^3$**.**

a) Demostrar que es subespacio vectorial de $(R^3 +, .)$.

b) Dado el subespacio vectorial: $B=L\{(1,2,0),(-3,1,1),(-3,8,2)\}\subset R^3$.

Hallar una base de A+B y la dim($A\cap B$).

2º.- Estudiar según los diversos valores del parámetro que contiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay-z=1 \\ -2x+y+2z=0 \\ x+2y\qquad=2 \\ 5x+ay\qquad=3 \end{array}\right\} a\in R\,.$$

3º.- Dado el punto P(1, 1, 1) y la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{array}\right.$.

a) Calcular la distancia de P a “r”.
b) Hallar la recta que pasa por “P” y corta perpendicularmente a “r”.

4º.- Sea la forma cuadrática sobre R^3:

$$\varphi(\vec{x})=7x_1^2+10x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3.$$

a) Clasificarla.
b) Diagonalizarla ortogonalmente.
c) Descomponerla en suma de cuadrados.
d) Poner las nuevas componentes en función de las antiguas.

5º.- Sea el haz de cónicas: $\alpha x^2+\alpha y^2-2xy-2(\alpha+1)x+2y+2=0 \quad \alpha\in R$**.**

Clasificar, según los distintos valores del parámetro α**.**

Soluciones

1º.- a) $A \neq \Phi$ tiene infinitos elementos.

$$\left.\begin{array}{l}\forall (0,a,-a),(0,b,-b) \in A \\ \forall \alpha,\beta \in R\end{array}\right\} \alpha(0,a,-a)+\beta(0,b,-b)=(0,\alpha a+\beta b,-(\alpha a+\beta b)) \in A\,.$$

Luego es subespacio vectorial.

b) $A = L\{(0,-1,1)\} \Rightarrow \dim A = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{el rango es } 2 \Rightarrow \dim B = 2$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ pues} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim(A+B)=3 \Rightarrow$$

una base de $A+B$ será $\{(0,-1,1),(1,2,0),(-3,1,1)\}$.
$\dim(A+B)=3=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)=1+2-0 \Rightarrow \dim(A\cap B)=0.$

2º.- El rango de la matriz ampliada puede valer 4, mientras que el de la matriz de coeficientes como máximo 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2^{a}F + 2.1^{a}F = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1+2a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & a & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1+2a & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3^{a}F - 5.2^{a}F = -\begin{vmatrix} 0 & 1+2a & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-10 & -7 \end{vmatrix} = (-)(-)\begin{vmatrix} 1+2a & 2 \\ a-10 & -7 \end{vmatrix} = -7-14a-2a+20 \Rightarrow$$

$$-16a+13=0 \Rightarrow a=\frac{13}{16}.$$

1º Caso.- $a \neq \frac{13}{16}$ el rango de la ampliada vale 4, como el de la matriz de coeficientes como máximo valdrá $3 \Rightarrow$ El sistema es **incompatible.**

2º Caso.- $a = \frac{13}{16}$**.**

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & \frac{13}{16} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ rango de la matriz de coeficientes=rango de la ampliada=número de incógnitas $\Rightarrow$ **Compatible determinado.**

3º.- a) Pasando la ecuación de la recta a paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-z \\ -2x-y=3z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2z \\ y=z-1 \\ z=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q(1,-1,0)\,\text{punto de la recta} \\ (-2,1,1)\,\text{vector director} \end{array}\right\}.$$

Planos perpendiculares a “r” -2x+y+z+D=0, el que pasa por P(1,1,1)

-2+1+1+D=0$\Rightarrow$-2x+y+z=0. Hallando su intersección con la recta:

-2(1-2z)+(z-1)+z=0$\Rightarrow$6z=3$\Rightarrow$ $z=\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2.\frac{1}{2}=0 \\ y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

La distancia de P(1,1,1) al punto calculado $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ será la pedida.

$$\sqrt{(1-0)^2+(1+\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

b) La recta pedida será la que pasa por los puntos P(1,1,1) y $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{z-1}{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}}=\frac{z-1}{\frac{1}{2}}$$

4º.-

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 1^{a}F + 2^{a}F + 3^{a}F = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 1 \\ 6-\lambda & 10-\lambda & -2 \\ 6-\lambda & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \text{restando la } 1^{a}F \text{ a las demás} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 12-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)(12-\lambda)(6-\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \text{ doble} \\ \lambda = 12 \text{ simple} \end{cases}$$

a) Es definida positiva.
b) Vectores propios:

$$\lambda = 12 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} -5x-2y=-z \\ -2x-2y=2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \text{un vector propio } (1,-2,1) \Rightarrow \text{unitario } \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x-2y+z=0 \Rightarrow x = 2y-z \Rightarrow \text{un vector}$$

(2,1,0).

Para obtener otro ortogonal a él (2,1,0)(2y-z, y, z)=0 $\Rightarrow$ 4y-2z+y=0

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}z$, sustituyendo, un vector será (-1, 2, 5).**Ahora ya son ortogonales.** Falta que sean unitarios, dividiendo por sus módulos ya tenemos la base ortonormal.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5)\right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} P \quad \text{siendo } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

c) $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 12y_1{}^2 + 6y_2{}^2 + 6y_3{}^2$.

d) $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2) \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-x_1 + 2x_2 + 5x_3) \end{cases}$$

5º.- La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -(\alpha+1) \\ -1 & \alpha & 1 \\ -(\alpha+1) & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1^a F + 3^a F = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -\alpha+1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ -(\alpha+1) & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1^a C + 3^a C = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & -\alpha+1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1-\alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^a F - \alpha.3^a F = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & -\alpha+1 \\ -\alpha(1-\alpha) & 0 & 1-2\alpha \\ 1-\alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-\left[-\alpha(1-2\alpha\alpha + \alpha(1-\alpha)^2\right] = \alpha - 2\alpha^2 - \alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3 = -\alpha^3$$

1º Caso $\alpha = 0 \Rightarrow$ Cónica degenerada $\Rightarrow r\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow 2$ rectas.

2º Caso $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ Cónica no degenerada.

$$A_{33} = \alpha^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, -1) > 0 \Rightarrow \text{Elipses} \\ (-1, 0) \cup (0, 1) < 0 \Rightarrow \text{Hipérbolas} \\ (1, \infty) > 0 \Rightarrow \text{Elipses} \\ \alpha = -1 \ \text{Parábola} \\ \alpha = 1 \ \text{Parábola} \end{cases}$$