1º Se considera un endomorfismo de $(R^4, +, .)$ definido por:

$f(\vec{e}_1) = (1,3,2,2); f(\vec{e}_2) = (2,-4,1,-1);$

$f(\vec{e}_3) = (3,-5,2,-1); f(\vec{e}_4) = (4,2,-6,3)$

a) Calcular dim(Ker(f)), dim(Im(f)) y clasificarlo.
b) ¿Se puede calcular $f^{-1}(0,6,4,7)$? Razonar la respuesta.

2º Discutir el siguiente sistema según los distintos valores de los parámetros que contiene y resolverlo.

$$\begin{cases} x - ny + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ mx - 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad n, m \in R.$$

3º Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z; \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

Se pide la ecuación de los planos que pasando por cada una de ellas son paralelos a la otra. ¿Cómo son los planos entre sí?

4º Sea A la matriz de un endomorfismo "f" de R^3 en la base canónica.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz de "f" referida a la base $B = \{(0,1,-1),(1,1,1),(2,-1,-1)\}$.
b) ¿Puedes encontrar otra base donde la matriz asociada a "f" es diagonal? Caso afirmativo hallarla.

5º Clasificar las siguientes cónicas:

$x^2 - 3xy + 2y^2 - x - 2 = 0.$

$3x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x - 2y - 3 = 0.$

Hallar la ecuación reducida y en caso de degeneradas, las rectas en que se descompone.

6º Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.Hallar la matriz P ortogonal que permite su diagonalización. Calcular A^n.

Soluciones

1º

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matriz del endomorfismo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; |A| = 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$

Dim(Im(f))=3,no coincide con la dimensión del espacio final,
luego no es suprayectiva o sobreyectiva.
Dim(ker(f))=1$\neq$0, tampoco es inyectiva.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas
donde sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es 3.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -8$, luego el rango de la matriz ampliada es 4 por tanto
sistema incompatible, no se puede calcular.

2º Sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ orlando tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3n+1; \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2m-11.$$

1º Caso si $n \neq -\frac{1}{3}$ o $m \neq -\frac{11}{2}$, el r(A)=3 la única solución

x=y=z=0.

2º Caso $n = -\frac{1}{3}$ y $m = -\frac{11}{2}$, r(A)=2, compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = z \\ 2x + y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y = 3z \end{array}\right.$$

3º Haz de planos que contienen a “r”:

$(x - 2z - 1) + \lambda(y - 3z - 2) = 0$, vector director $(1, \lambda, -2 - 3\lambda)$.

$(1, \lambda, -2 - 3\lambda).(3,2,1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Sustituyendo x+y-5z-3=0 es el plano que contiene a “r” y es paralelo a “s”.

Haz de planos que contienen a “s”:

$(x - 3z + 1) + \lambda(y - 2z - 1) = 0$, vector director $(1, \lambda, -3 - 2\lambda)$.

$(1, \lambda, -3 - 2\lambda).(2,3,1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Sustituyendo x+y-5z=0 es el plano que contiene a “s” y es paralelo a “r”.

Los planos son paralelos.

4º

a) La matriz de cambio de la base canónica a la base B:

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ La matriz pedida será $P^{-1}AP$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2/3 & -2/3 & -10/3 \\ -1/3 & -2/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

b) Calculando los valores propios:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 & \text{doble} \\ -1 & \text{simple} \end{cases}$$

Veamos si es diagonalizable:

$$\lambda = 2 \Rightarrow M(f-2e) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f-2e)) = 1$$ Como no coincide con el número de veces que se repite, no es diagonalizable.

5º $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; |A| = 0; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Se trata de dos rectas.

$$x^2 - (3y+1)x + (2y^2-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{(3y+1) \pm \sqrt{(3y+1)^2 - 4(2y^2-2)}}{2} =$$

$$= \frac{(3y+1) \pm \sqrt{(y+3)^2}}{2} = \begin{cases} 2y+2 \\ y-1 \end{cases}$$

Las rectas son: $x=2(y+1)$, $x=y-1$.

La descomposición de la cónica $(x-2y-2)(x-y+1)=0$.

Para la otra cónica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -48; A_{33} = 14 > 0 \text{ elipse.}$$

$$C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0, \text{su matriz} \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

Poniendo los invariantes:

$$\begin{cases} |A| = -48 = C_1 C_2 C_3 \\ A_{33} = 14 = C_1 C_2 \\ a_{11} + a_{22} = 8 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\dfrac{24}{7} \\ C_1 = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow C_2 = 4 - \sqrt{2} \\ C_1 = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow C_2 = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

1º Caso $\quad (4 + \sqrt{2})x^2 + (4 - \sqrt{2})y^2 = \dfrac{24}{7}$

$$\frac{7}{24}(4 + \sqrt{2})x^2 + \frac{7}{24}(4 - \sqrt{2})y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\dfrac{24}{7(4 + \sqrt{2})}} + \frac{y^2}{\dfrac{24}{7(4 - \sqrt{2})}} = 1$$

2º Caso $\quad (4 - \sqrt{2})x^2 + (4 + \sqrt{2})y^2 = \dfrac{24}{7}$

$$\frac{x^2}{\dfrac{24}{7(4 - \sqrt{2})}} + \frac{y^2}{\dfrac{24}{7(4 + \sqrt{2})}} = 1$$

6º $\quad A = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = 2 \text{ simple} \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal.}$$

$$A^n = P D^n P^t \text{ siendo } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$