1º.- Estudiar el sistema según los valores del parámetro que contiene:

$$\begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + 2z - 2t = 0 \\ az - t = 0 \end{cases} \qquad a \in R$$

2º.- Sea la aplicación lineal:

$$f : R^3 \to R^3 \;/\; f(x\ ,\ y\ ,\ z)\ = (x+y+z\ ,\ x+ay+z\ ,\ x+y+bz)\quad a,\ b\ \in R.$$

a) Clasificar la aplicación según los distintos valores de los parámetros **a** y **b.**
b) Caso de a=0 y b=-1, hallar la matriz de la aplicación en la base B.

$$B=\{(1,2,1), (0,3,5), (-1,0,2)\}.$$

3º.- Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a} \quad a \in R\,.$$

a) Hallar el valor de "**a**" para que exista un plano que contenga a "r" y sea perpendicular a "s".

b) Calcular dicho plano.

4º.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

¿Es diagonalizable?. En caso afirmativo calcular la base ortonormal tal que la matriz asociada sea diagonal y hallar la matriz P ortogonal.

5º.- Dadas las cónicas:

$$4x^2 + 3y^2 + 6xy + 2x = 0$$
$$-2x^2 + y^2 + xy + 7x + 2y - 3 = 0$$

Clasificarlas, hallando las rectas en que se descompone o la ecuación reducida, según los casos.

Soluciones

1º.- $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{cases} \text{A matriz de coeficientes.} \\ \text{B matriz ampliada.} \end{cases}$

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 2 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 2^aF - 1^aF = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2(-1+a).$$

1º Caso $a \neq 0$ y 1, r(A)=4=r(B)=nº de incógnitas$\Rightarrow$Compatible determinado.

2º Caso a=0.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2 \text{ orlando para la ampliada}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2^aC + 1^aC = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.}$$

3º Caso a=1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$

El rango de la matriz ampliada puede valer 4, orlando

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B) = 4 \Rightarrow \text{Incompatible.}$$

2º.- La matriz de la aplicación en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

a) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&b\end{vmatrix}=2^aF-1^aF=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\1&1&b\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&b\end{vmatrix}=(a-1)(b-1).$

Dim R^3 =dim Ker(f)+dim Im(f).

1º Caso.- Si $a\neq 1$ y $b\neq 1$ el r(A)=3=dim Im(f) que coincide con la dimensión del espacio final, luego la aplicación es **sobre.**

La dim Ker(f)=0$\Rightarrow$Ker(f)$=(0,0,0)\Rightarrow$es **inyectiva.**

Se trata de un endomorfismo biyectivo $\Rightarrow$Es un **automorfismo.**

2º Caso.- Si a=1 $\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}r(A)=1 \text{ si } b=1\\ r(A)=2 \text{ si } b\neq 1\end{cases}$

En ambos casos no es ni **inyectiva** ni **sobre.** Es un endomorfismo.

3º Caso.- Si b=1 $\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}r(A)=1 \text{ si } a=1\\ r(A)=2 \text{ si } a\neq 1\end{cases}$

En ambos casos no es ni **inyectiva** ni **sobre.** Es un endomorfismo.

b) En este caso la matriz de la aplicación en las bases canónicas es:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Al ser un endomorfismo, al cambiar de base en el espacio inicial también se cambia en el final, por tanto la matriz de cambio de base P=Q.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\\1&5&2\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&5&-3\\4&-3&2\\-7&5&-3\end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-6 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\\ -7 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -17 & 8\\ 14 & 13 & -5\\ -24 & -25 & 7\end{pmatrix}.$$

3º.- a) Hallamos el haz de planos que contienen a "r".

$$(x-y+z-1)+\lambda(2x+y-z-2)=0\Rightarrow(1+2\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z-1-2\lambda=0.$$

Vector director $\left((1+2\lambda),(\lambda-1),(1-\lambda)\right)$.

Tenemos que elegir el perpendicular a la recta "s", luego los vectores deberán ser proporcionales:

$$\frac{1+2\lambda}{3}=\frac{\lambda-1}{2}=\frac{1-\lambda}{a}\Rightarrow 2(1+2\lambda)=3(\lambda-1)\Rightarrow\lambda=-5$$
$$\frac{-5-1}{2}=\frac{1-(-5)}{a}\Rightarrow 3a=-6\Rightarrow a=-2$$

b) El plano será: $(x-y+z-1)-5(2x+y-z-2)=0$

-9x-6y+6z+9=0 simplificando 3x+2y-2z-3=0.

4º.-La matriz por ser simétrica siempre es diagonalizable.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}8-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 5-\lambda & 4\\ 2 & 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=2^aC+3^aC=\begin{vmatrix}8-\lambda & 0 & 2\\ -2 & 9-\lambda & 4\\ 2 & 9-\lambda & 5-\lambda\end{vmatrix}=3^aF-2^aF=$$

$$=\begin{vmatrix}8-\lambda & 0 & 2\\ -2 & 9-\lambda & 4\\ 4 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)\begin{vmatrix}8-\lambda & 2\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)[(8-\lambda)(1-\lambda)-8]=(9-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

Valores propios λ=9 (doble), λ=0 simple.

Cálculo de vectores propios:

$\lambda=0$.

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\begin{cases} -2x+5y=-4z \\ 2x+4y=-5z \end{cases}\Rightarrow 9y=-9z\Rightarrow y=-z; x=-\frac{z}{2}$$

$$\mathrm{Ker}(f-0e)=\left\{(\frac{-z}{2},-z,z)\right\}=L\{(-1,-2,2)\}\Rightarrow \text{un vector propio } (-1,-2,2)$$

$\lambda=9$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow -x-2y+2z=0\Rightarrow \mathrm{Ker}(f-9e)=\{(-2y+2z,y,z)\}$$

un vector propio $(-2,1,0)$ el otro deberá ser ortogonal $\Rightarrow (-2,1,0)(-2y+2z,y,z)=0$.

$4y-4z+y=0\Rightarrow y=\frac{4}{5}z\Rightarrow$ un vector el $(2,4,5)$.

La base ortogonal será $\{(-1,-2,2),(-2,1,0),(2,4,5)\}$ dividiendo entre sus módulos tenemos la base ortonormal.

$\left\{\frac{1}{3}(-1,-2,2),\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0),\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)\right\}$ La matriz en esta base es la diagonal $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

y la matriz P ortogonal es la de cambio de base= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

5º.-

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3\Rightarrow \text{Cónica no degenerada}, A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3>0\Rightarrow \text{Elipse}$$

Ecuación reducida

$$C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0 \Rightarrow \text{Invariantes} \begin{cases} |A| = -3 = C_1 C_2 C_3 \\ A_{33} = 3 = C_1 C_2 \\ a_{11} + a_{22} = 7 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_3 = -1.$$

$$\text{Resolviendo la ecuación } C_2{}^2 - 7C_2 + 3 = 0 \begin{cases} C_2 = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \Rightarrow C_1 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \\ C_2 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2} \Rightarrow C_1 = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\frac{2}{7-\sqrt{37}}} + \frac{y^2}{\frac{2}{7+\sqrt{37}}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{2}{7+\sqrt{37}}} + \frac{y^2}{\frac{2}{7-\sqrt{37}}} = 1.$$

En la otra cónica:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -8 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -9 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Cónica degenerada.}$$

$$r(A) = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

Resolviendo la ecuación:

$$y^2 + y(x+2) + (-2x^2 + 7x - 3) = 0.$$

$$y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{(x+2)^2 - 4(-2x^2 + 7x - 3)}}{2} = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{2} =$$

$$= \frac{-(x+2) \pm \sqrt{(3x-4)^2}}{2} = \frac{-(x+2) \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} x-3 \\ -2x+1 \end{cases}$$

La ecuación se puede descomponer en:

$(y - x + 3)(y + 2x - 1) = 0.$ Las dos rectas.