1º.- Estudiar el sistema según los valores del parámetro que contiene:

$$\begin{cases} x+ \ \ y+ \ \ z=1 \\ -ax+ \ \ y+ \ \ z=2 \\ x-ay+ \ \ z=3 \\ x+ \ \ y-az=4 \end{cases} \quad a\in R$$

2º.- Sea la aplicación lineal: f : $R^2 \to R^3$ / f(x , y) = (x-y , 2x , 3x+2y).

Y sean $B_1=\{(1,0),(3,-2)\}$ y $B_2=\{(1,1,-1),(2,1,1),(-1,-2,2)\}$ bases de R^2 y R^3

respectivamente.

a) Clasificar la aplicación
b) Hallar la matriz de "f" en las bases: canónica en el inicial y B_2 en el final.
c) Hallar la matriz de "f" en las bases: B_1 en el inicial y canónica en el final.

3º.- Dadas las rectas: $r:\begin{cases} x+ay+z=4 \\ 2x+y+z=5 \end{cases} \quad s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+b\lambda \end{cases} \quad a, b\in R$

a) Hallar **a** y **b** para que r y s sean paralelas.
b) Determinar a y b para que r y s se corten.
c) Para a=1 y b=2, hallar el ángulo entre dichas rectas.

4º.- Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es diagonalizable? Razonar la respuesta.
b) Calcular A^n.

5º.- Sea el haz de cónicas: $(1+a)x^2+ay^2+2axy+2x+a-3=0 \quad a\in R$**.**

a) Clasificar, según los distintos valores del parámetro "**a**".
b) Para a=3,hallar las tangentes a la cónica en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Soluciones

1º.- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -a & 4 \end{array}\right)$, el rango de la matriz ampliada puede valer 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -a & 4 \end{vmatrix} = \text{restando la 1ª columna a las demás}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1+a & 1+a & 2+a \\ 1 & -a\text{-}1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -a\text{-}1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1+a & 2+a \\ -(a+1) & 0 & 2 \\ 0 & -(1+a) & 3 \end{vmatrix} = (1+a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2+a \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Sumando la 1ª fila a la 2ª

$$(1+a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2+a \\ 0 & 1 & 4+a \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1+a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4+a \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (1+a)^2(7+a).$$

1º Caso $a \neq -1 y -7 \Rightarrow$ rango de la matriz ampliada r(B)=4 y la de coeficientes A como máximo valdrá 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

2º Caso a=-1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow r(A)=1, r(B)=2 \Rightarrow \text{sistema incompatible}.$$

3º Caso.a=-7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow$$ r(A)=r(B)=3= nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

2º.- a) Ker(f)= $\left\{(x,y)/f(x,y)=(0,0,0)=(x-y,\ 2x,\ 3x+2y)\ \begin{cases} x-y=0 \\ 2x=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}\right\}=\{(0,0)\}$.

La aplicación es inyectiva.

$\dim R^2=\dim Ker(f)+\dim Im(f)\Rightarrow \dim Im(f)=2\neq \dim R^3\Rightarrow$ no es "sobre"

b) f(1,0)=(1,2,3); f(0,1)=(-1,0,2), la matriz en las bases canónicas es:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ como solo se cambia en el espacio final tenemos que la matriz

de cambio Q= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz pedida $=Q^{-1}.A$

$$Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow Q^{-1}.A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) f(1,0)=(1,2,3); f(3,-2)=(5,6,5).

La matriz pedida es: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

De otra forma, la matriz de cambio es P= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y la pedida será:

$$A.P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3º.- $r:\begin{cases} x+ay+z=4 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\Rightarrow \begin{cases} x+z=4-ay \\ 2x+z=5-y \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=1+(a-1)y \\ y=y \\ z=3+(1-2a)y \end{cases}\Rightarrow$

$r:\begin{cases} \text{Punto } A(1,0,3) \\ \text{Vector director } \vec{v}(a-1,\ 1,\ 1-2a) \end{cases}$ $s:\begin{cases} \text{Punto } B(1,1,1) \\ \text{Vector director } \vec{w}(-1,1,b) \end{cases}$

a) Para que las rectas sean paralelas los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{a-1}{-1}=\frac{1}{1}=\frac{1-2a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$$

b) Para que las rectas se corten deben estar en el mismo plano(no siendo paralelas)

$$\begin{vmatrix}\vec{AB}\\\vec{v}\\\vec{w}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\a-1 & 1 & 1-2a\\-1 & 1 & b\end{vmatrix}=0$$, restando la 1ª fila a las demás

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\a-1 & 0 & 3-2a\\-1 & 0 & b+2\end{vmatrix}=-[(a-1)(b+2)+(3-2a)]=-(ab+2a-b-2+3-2a)=$$

$$=-b(a-1)-1=0\Rightarrow b(1-a)=1$$

Esta es la relación que deben cumplir. De estos casos habrá que quitar el a=0, b=1 pues es el de las paralelas.

c) Para a=1 y b=2 los vectores directores de las rectas son:

$$\vec{v}=(0,1,-1)\quad \vec{w}=(-1,1,2)\Rightarrow\vec{v}.\vec{w}=|\vec{v}|.|\vec{w}|\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\alpha=\arcos\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(Cuando nos sale negativo es el suplementario).

4º.- $$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\9 & -\lambda & 0\\0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0=(3-\lambda)(\lambda^2-9)\Rightarrow\begin{cases}\lambda=3\,(\text{doble})\\\lambda=-3\end{cases}$$

a) Para ser diagonalizable dim Ker(f-3e)=2.

$$r\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\9 & -3 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1\Rightarrow \dim\mathrm{Im}(f-3e)=1.$$ Se cumple, es diagonalizable.

b) Para calcular la potencia n-ésima podemos utilizar la diagonalización.

$$D^n=P^{-1}A^nP\Rightarrow A^n=PD^nP^{-1}$$

Vectores propios:

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x + y = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(f - 3e) = \{(x,3x,z)\} \Rightarrow L\{(1,3,0),(0,0,1)\}$$

Para $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = 0 \end{cases} - \Rightarrow \mathrm{Ker}(f + 3e) = \{(x,-3x,0)\} \Rightarrow L\{(1,-3,0)\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-3)^n & 3^{n-1} + (-3)^{n-1} & 0 \\ 3^{n+1} + (-3)^{n+1} & 3^n + (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2.3^n \end{pmatrix}$$

5º.- a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1+a & a & 1 \\ a & a & 0 \\ 1 & 0 & a-3 \end{pmatrix}; |A| = 1^{a}C - 2^{a}C = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = a(a-4)$.

1º Caso a=0.

$$r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

2º Caso a=4.

$$r(A) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

3º Caso: $a \neq 0 \, y \, 4 \Rightarrow$ cónica no degenerada.

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1+a & a \\ a & a \end{vmatrix} = a \Rightarrow \begin{cases} (0,4) \cup (4,\infty), A_{33} > 0 \Rightarrow \text{Elipses} \\ (-\infty,0), \qquad A_{33} < 0 \Rightarrow \text{Hipérbolas} \end{cases}$$

b) $4x^2+3y^2+6xy+2x=0$.

Puntos de corte con el eje de abscisas y=0.

$$4x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \text{punto } (0,0,1) \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{punto } (-\frac{1}{2},0,1)=(-1,0,2) \end{cases}$$

Las tangentes serán las polares de esos puntos:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X=0 \Rightarrow x=0.$$

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2X-3Y-Z=0 \Rightarrow 2x+3y+1=0.$$