1º Dada la aplicación lineal: $f: R^3 \to R^2 \;/\; f(x,y,z) = (2x + y + z,\ 2y + 4z)$.

a) Hallar la matriz de la aplicación asociada a las bases canónicas.
b) Si se cambia de bases:
   $B_1 = \{(1,-1,2),(0,3,-2),(1,1,1)\}, B_2 = \{(1,3),(-1,5)\}$.
   Hallar las matrices de cambio de base y la matriz de la aplicación en las nuevas bases.

2º Hallar el área del triángulo determinado por los puntos A(1,2,1),

B(5,3,2) y el punto intersección de la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{y el plano} \quad \pi \equiv 2x + y - z + 5 = 0.$$

3º Sea A la matriz de un endomorfismo de R^3:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base ortonormal tal que la matriz asociada sea diagonal. Encontrar la relación entre la matriz “A” y la matriz diagonal.

4º Estudiar y resolver según los distintos valores de los parámetros el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = a \\ 3x - y = 1 \\ x + y = a - 3 \\ 2x - y = a + b \end{array}\right\} a, b \in R.$$

5º Clasificar según los valores del parámetro λ las cónicas:

$$x^2 - \lambda xy + 2y^2 - x - 2 = 0.$$

En caso de cónica degenerada, calcular las rectas en que se descompone.

Solución

1º

a) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&4\end{pmatrix}$.

b) $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&3&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$; $Q=\begin{pmatrix}1&-1\\3&5\end{pmatrix}$; $Q^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5&1\\-3&1\end{pmatrix}$.

$$B=Q^{-1}AP=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}21&3&26\\-3&-5&-6\end{pmatrix}.$$

2º

$$\left.\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\y=3\lambda\\z=-1-\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 2(1+2\lambda)+3\lambda-(-1-\lambda)+5=0\Rightarrow\lambda=-1$$

C(-1,-3,0) punto de intersección.

$\overline{AB}=(4,1,1)$; $\overline{AC}=(-2,-5,-1)$

$$\overline{AB}\mathrm{x}\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&1&1\\-2&-5&-1\end{vmatrix}=4\vec{i}+2\vec{j}-18\vec{k}.$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+324}=\sqrt{\frac{344}{4}}=\sqrt{86}.$$

3º

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&4&3\\4&5-\lambda&3\\3&3&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&4&3\\-1+\lambda&1-\lambda&0\\3&3&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&4&3\\-1&1&0\\3&3&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}9-\lambda&4&3\\0&1&0\\6&3&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\lambda(\lambda-11)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\\lambda=1\\\lambda=11\end{cases}$$

Cálculo de los vectores propios:

$\lambda=0.$

$$\begin{pmatrix}5&4&3\\4&5&3\\3&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}4y+3z=-5x\\5y+3z=-4x\end{array}\right\}y=x,\ z=-3x$$

Un vector propio (1,1,-3).

$\lambda = 1.$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4y + 3z = -4x \\ 3y + \ \ z = -3x \end{matrix}\right\} y = -x,\ z = 0.$$

Un vector propio $(1,-1,0)$.

$\lambda = 11.$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4y + 3z = 6x \\ -6y + 3z = -4x \end{matrix}\right\} y = x,\ z = \frac{2}{3}x.$$

Un vector propio $(3,3,2)$.

La base ortonormal:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{22}}(3,3,2)\right\}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{-3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}; D = P^t A P, \text{ pues } P^{-1} = P^t.$$

4º

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix} a \\ 1 \\ a-3 \\ a+b \end{matrix}}_{B}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

$$\text{Orlando} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = 3a - 22, \text{se anula para } a = \frac{22}{3}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a+b \end{vmatrix} = 8a + 7b - 5.$$

Para que el sistema sea compatible determinado $r(A)=r(B)=2$, los dos determinantes tienen que valer cero, sustituyendo $a = \frac{22}{3}$ en $8a+7b-5=0$

obtenemos b=-23/3.

1º Caso a=22/3 y b=-23/3 Sistema compatible determinado.

2º Caso $a \neq \frac{22}{3}$ y $\forall b$,r(A)=2 y r(B)=3 Incompatible.

3º Caso $b \neq \frac{-23}{3}$ y $\forall a$,r(A)=2 y r(B)=3 Incompatible.

Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + y = \frac{13}{3} \end{array}\right\} x = \frac{4}{3}, y = 3.$$

5º

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}; |A| = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 9).$$

1º Caso $\lambda = 3, r(A) = 2 \Rightarrow$ dos rectas.

$$2y^2 - 3xy + (x^2 - x - 2) = 0.$$

$$y = \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 8(x^2 - x - 2)}}{4} = \frac{3x \pm (x+4)}{4} = \begin{cases} x + 1 \\ \frac{x - 2}{2} \end{cases}$$

$$(y - x - 1)(2y - x + 2) = 0.$$

2º Caso $\lambda = -3, r(A) = 2 \Rightarrow$ dos rectas.

$$2y^2 + 3xy + (x^2 - x - 2) = 0.$$

$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 - 8(x^2 - x - 2)}}{4} = \frac{-3x \pm (x+4)}{4} = \begin{cases} \frac{-x + 2}{2} \\ -x - 1 \end{cases}$$

$$(2y + x - 2)(y + x + 1) = 0.$$

.... 3º Caso $A_{33} = 2 - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{8 - \lambda^2}{4} \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$ Parábolas.

$(-\infty, -3) \cup (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, \infty)$ son hipérbolas pues $A_{33} < 0$.

$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ son elipses pues $A_{33} > 0$.