1º Sea el endomorfismo:

$$f: R^3 \to R^3 \ / \ f(x,y,z) = (x - y + \lambda z, x + \lambda y - z, \lambda x + y + z) \quad \lambda \in R.$$

a) Clasificar el endomorfismo según los distintos valores de λ.
b) Para $\lambda = 0$, hallar la matriz del endomorfismo en la base:
$B = \{(1,0,-1),(0,2,1),(0,1,0)\}$.

2º Hallar **a** y **b** de modo que sean números naturales y que el determinante de la matriz A.B sea 1000.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 3 \\ b^2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3º Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + z + t = 1 \\ \lambda y + z - t = 1 \\ \lambda y + 2z - 2t = 0 \\ \lambda z - t = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in R.$$

4º Sea: $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad a, b \in R$.

a) Estudiar la diagonalización de la matriz según los diferentes valores de los parámetros que contiene.
b) Para a=2 y b=1 ¿se puede hallar una base donde la matriz asociada sea diagonal? Caso afirmativo calcularla y relacionar la matriz dada con la diagonal.

5º Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{3} = z \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

a) Sea $\vec{u} = (1,b,c)$.Calcular b y c para que el vector sea ortogonal a “r” y “s”.
b) Hallar el plano que contiene a “s” y es paralelo a $\vec{u}$.
c) Hallar la perpendicular común a ambas rectas.

Solución

1º

a)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & \lambda\\ 1 & \lambda & -1\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix};|A|=\begin{vmatrix}0 & -1 & \lambda\\ 1+\lambda & \lambda & -1\\ \lambda+1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix}0 & -1 & \lambda\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix}0 & -1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(1+\lambda)(-\lambda^2+\lambda+2)=(1+\lambda)^2(2-\lambda).$$

1) $\lambda \neq -1\, y\, 2 \Rightarrow r(A)=3, \dim(\mathrm{Im}(f))=3(\text{sobre}), \dim(\mathrm{Ker}(f))=0(\text{inyectiva}).$
Endomorfismo biyectivo = Automorfismo.

2) $\lambda=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix};r(A)=1, \dim(\mathrm{Im}(f))=1, \dim(\mathrm{Ker}(f))=2.$

No es "sobre" ni "inyectiva".

3) $\lambda=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix};r(A)=2, \dim(\mathrm{Im}(f))=2, \dim(\mathrm{Ker}(f))=1.$

No es "sobre" ni "inyectiva".

b)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix};P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

2º

$$A.B=\begin{pmatrix}-a^2-12 & 2a^2+14\\ -b^2-11 & 2b^2+12\end{pmatrix};|A.B|=10a^2-10b^2+10=1000 \Rightarrow a^2-b^2+1=100 \Rightarrow$$

$$a^2-b^2=99=(a+b)(a-b) \Rightarrow \begin{cases}1^{\circ})\ (a+b)=99\ y\ (a-b)=1 \Rightarrow a=50, b=49\\ 2^{\circ})\ (a+b)=33\ y\ (a-b)=3 \Rightarrow a=18, b=15\\ 3^{\circ})\ (a+b)=11\ y\ (a-b)=9 \Rightarrow a=10, b=1\end{cases}$$

3º

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \end{array}\right); A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda^2(\lambda - 1).$$

1) $\lambda \neq 0,1 \;\; r(A) = r(\text{ampliada}) = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ Compatible determinado.

$$x = \frac{-2}{\lambda(\lambda-1)}; y = \frac{2}{\lambda}; z = \frac{1}{(\lambda-1)}; t = \frac{\lambda}{(\lambda-1)}.$$

2) $\lambda = 0; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Incompatible.

3) $\lambda = 1; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Incompatible.

4º

a)

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = a, 1, 2.$$

1) $a \neq 1$ y $2 \Rightarrow$ diagonalizable.

2) $a = 1, \lambda = 1$ doble.

$$r\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } b \neq 0 \Rightarrow \dim(\ker(f - e)) = 1, \text{ no diagonalizable.} \\ 1 \text{ si } b = 0 \Rightarrow \dim(\ker(f - e)) = 2, \text{diagonalizable.} \end{cases}$$

3) $a = 2, \lambda = 2$ doble.

$$r\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim(\ker(f - 2e)) = 2, \text{diagonalizable.}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

$\lambda = 2.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f - 2e) = \{(x,0,z)\ /\ x,z \in R\} = L\{(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

$\lambda = 1.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f - 1e) = \{(x,-x,0)\ /\ x \in R\} = L\{(1,-1,0)\}.$$

La base es la formada por los vectores propios $\{(1,0,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

La matriz de cambio $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$

5º

a)

$$\left.\begin{array}{l} (1,b,c).(-2,3,1) = 0 \Rightarrow -2 + 3b + c = 0 \\ (1,b,c).(2,1,1) = 0 \Rightarrow 2 + b + c = 0 \end{array}\right\} b = 2, c = -4.$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y - z - 2 = 0.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan.}$$

P punto de "r" $(5-2\lambda, -2+3\lambda, \lambda)$

Q puntode"s" $(4+2\mu, 2+\mu, \mu)$

$$\overrightarrow{PQ} = (-1+2\mu+2\lambda,\ 4+\mu-3\lambda,\ \mu-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}.(-2,3,1) = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.(2,1,1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 1, \mu = -\frac{1}{3}$$

$$P(3,1,1), Q\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

La perpendicular común: $\dfrac{x-3}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y-1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{z-1}{-\frac{4}{3}}$;

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}.$$