1º.- Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0 \qquad a,b,c \in R.$

2º.- Dada la aplicación lineal $f: R^4 \to R^2$ cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcular la matriz de "f" si en R^2 se tiene la base $B = \{(1,3),(2,5)\}$.

3º.- En R^2 se definen las siguientes operaciones:

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \qquad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R^2.$

$\alpha.(x,y)=(\alpha x, \frac{\alpha}{2} y) \qquad \forall \alpha \in R, \forall (x,y) \in R^2.$

Sabiendo que $(R^2,+)$ es grupo abeliano, estudiar las 4 condiciones que debe cumplir la operación externa para que $(R^2,+,.)$ sea espacio vectorial sobre R.

4º.- Estudiar el sistema según los distintos valores de los parámetros que contiene:

$$\begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ bx + 2y - 4z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{cases} \qquad a,b \in R.$$

5º.- Sea $f: R^3 \to R^3 / f(x_1,x_2,x_3) = (3x_1+2x_2,\ 2x_1,\ x_1+2x_3)$.

a) Hallar la matriz asociada a "f".

b) Demostrar que $B = \{(-3,6,1),(0,0,1),(2,1,1)\}$ es base de R^3 y que dichos vectores son vectores propios de "f".

c) Calcular la matriz asociada a "f" en la base B.

6º.- La proyección del punto P(1,0,-1) sobre el plano π es el punto Q(-3,2,5).

a) Hallar la ecuación del plano π y el punto P' simétrico de P respecto del plano π.

b) Dada la recta: $x-2=\frac{y-6}{2}=z-8$, hallar el área del triángulo de vértices P, P' y el punto de corte de la recta con el plano π.

7º.- Dada la cónica: $3x^2+y^2-4xy+x+2y-5=0$.

a) Clasificarla.

b) Hallar su ecuación reducida.

Solución

1º.-

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \text{Sumando todas las columnas a la primera} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} =$$

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & x-b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} =$$

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} = 1^{a}C+3^{a}C \text{ y } 2^{a}C+3^{a}C =$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a+b-c & 0 & b-c \\ 0 & x+a-b-c & a-c \\ x-a+b-c & x+a-b-c & x-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & a-c \\ 1 & 1 & x-c \end{vmatrix} =$$

$$= 3^{a}F-1^{a}F = (x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & x-b \end{vmatrix} =$$

$$(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)\begin{vmatrix} 1 & a-c \\ 1 & x-b \end{vmatrix} =$$

$$=(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)(x-a-b+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-a-b-c \\ x=a-b+c \\ x=-a+b+c \\ x=a+b-c \end{cases} \text{soluciones de la ecuación.}$$

2º.- La matriz de cambio en el espacio final es:

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, como no hay cambio en el espacio inicial, la matriz de la aplicación

será $Q^{-1}A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3º.- Comprobaremos las cuatro propiedades de la operación externa:

a) $\forall\, \alpha \in R,\ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2 \quad \alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).$

El primer miembro:

$$\alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \left(\alpha(x_1 + x_2), \frac{\alpha}{2}(y_1 + y_2) \right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \left(\alpha x_1, \frac{\alpha}{2} y_1 \right) + \left(\alpha x_2, \frac{\alpha}{2} y_2 \right) = \left(\alpha x_1 + \alpha x_2, \frac{\alpha}{2} y_1 + \frac{\alpha}{2} y_2 \right).$$

Por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números reales, los dos miembros son iguales.

b) $\forall\, \alpha, \beta \in R,\ \forall (x, y) \in R^2 \quad (\alpha + \beta)(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$

El primer miembro:

$$(\alpha + \beta)(x, y) = \left((\alpha + \beta)x, \frac{(\alpha + \beta)}{2} y \right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha(x, y) + \beta(x, y) = \left(\alpha x, \frac{\alpha}{2} y \right) + \left(\beta x, \frac{\beta}{2} y \right) = \left(\alpha x + \beta x, \frac{\alpha}{2} y + \frac{\beta}{2} y \right) =$$

$$= \text{propiedad distributiva} \left((\alpha + \beta) x, \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) y \right).$$

Los dos miembros son iguales.

c) $\forall\, \alpha, \beta \in R,\ \forall (x, y) \in R^2 \quad (\alpha . \beta)(x, y) = \alpha\left(\beta (x, y) \right).$

El primer miembro:

$$(\alpha . \beta)(x, y) = \left((\alpha . \beta)x, \frac{(\alpha . \beta)}{2} y \right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha\left(\beta (x, y) \right) = \alpha\left(\beta x, \frac{\beta}{2} y \right) = \left(\alpha(\beta x), \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta}{2} y \right) \right).$$

Los dos miembros son distintos, no se cumple la igualdad pues

$$\frac{(\alpha.\beta)}{2} \neq \frac{\alpha}{2}.\frac{\beta}{2}.$$

d) $1 \in R, \ \forall (x,y) \in R^2 \ \ 1(x,y) = (x,y).$

$$1(x,y) = \left(1x, \frac{1}{2}y\right) = \left(x, \ \frac{1}{2}y\right) \neq (x,y) \Rightarrow \text{no se cumple la propiedad.}$$

4º.- Se trata de un sistema homogéneo luego siempre tiene la solución trivial.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ b & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{tomando un menor de orden 2 distinto de cero y orlando:}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ b & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b+8 & -6 & -4 \\ -10 & 16 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+8 & -6 \\ -10 & 16 \end{vmatrix} = 16(b+8) - 6.10 = 4(4b+17) = 0 \Rightarrow b = -\frac{17}{4}. \\ \begin{vmatrix} 2 & -a & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -a & 1 \\ 0 & -2+a & 0 \\ 0 & 2+2a & 5 \end{vmatrix} = (-2+a)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2. \end{cases}$$

1º Caso $b \neq -\frac{17}{4}$ y $\forall a \in R$, $r(A) = 3 =$ nº de incógnitas, solución trivial.

2º Caso $a \neq 2$ y $\forall b \in R$, $r(A) = 3 =$ nº de incógnitas, solución trivial.

3º Caso $b = -\frac{17}{4}$ y $a = 2$, $r(A) = 2 <$ nº de incógnitas (compatible indeterminado) infinitas soluciones.

5º.- a) $f(1,0,0) = (3,2,1); f(0,1,0) = (2,0,0); f(0,0,1) = (0,0,2)$, la matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $R^3 = L\{(-3,6,1),(0,0,1),(2,1,1)\}$, pues $\forall (a,b,c) \in R^3$ se puede poner como combinación lineal.

$$(a,b,c) = \alpha(-3,6,1) + \beta(0,0,1) + \gamma(2,1,1) \begin{cases} a = -3\alpha + 2\gamma \\ b = 6\alpha + \gamma \\ c = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \text{como} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{solución única.}$$

Cuando $a = b = c = 0$, la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$ son linealmente independientes.
Por tanto forman base.
Si $(-3,6,1)$ es vector propio debe cumplir $f(-3,6,1) = \lambda(-3,6,1)$, λ su valor propio.
$f(-3,6,1) = (3,-6,-1) = -1(-3,6,1) \Rightarrow \lambda = -1.$
$f(0,0,1) = (0,0,2) = 2(0,0,1) \Rightarrow \lambda = 2.$
$f(2,1,1) = (8,4,4) = 4(2,1,1) \Rightarrow \lambda = 4.$

c) La matriz asociada a "f" en la base formada por los vectores propios es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6º.- a) Si Q es la proyección del punto P sobre el plano π, el vector director del plano es $\overrightarrow{PQ}$.
$\overrightarrow{PQ} = (-3,2,5) - (1,0,-1) = (-4,2,6)$ también lo es el $(2,-1,-3)$.
$2x - y - 3z + D = 0$ son los infinitos planos que tienen ese vector director, el que necesitamos es el que pasa por $Q(-3,2,5) \Rightarrow -6 - 2 - 15 + D = 0 \Rightarrow D = 23.$
El plano es $2x - y - 3z + 23 = 0.$

Las coordenadas del punto simétrico $P'(x,y,z)$ $\begin{cases} -3 = \dfrac{1+x}{2} \Rightarrow x = -7 \\ 2 = \dfrac{0+y}{2} \Rightarrow y = 4 \\ 5 = \dfrac{-1+z}{2} \Rightarrow z = 11 \end{cases}$ $P'(-7,4,11).$

b) La recta en paramétricas $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = 8 + \lambda \end{cases}$ su intersección con el plano π nos da el punto

pedido "B", $2(2+\lambda) - (6+2\lambda) - 3(8+\lambda) + 23 = 0,\ -3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow B(1,4,7).$
El área del triángulo de vértices P, P', B será la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores: $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PB}$.
$\overrightarrow{PP'} = (-7,4,11) - (1,0,-1) = (-8,4,12); \overrightarrow{PB} = (1,4,7) - (1,0,-1) = (0,4,8).$

$$\overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 4 & 12 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4.4 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16(-\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}).$$

$\left|\overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{PB}\right| = 16\sqrt{1+16+4} = 16\sqrt{21}$. El área del triángulo $8\sqrt{21}$, unidades de superficie.

7º.- a) La matriz de la cónica:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -5 \end{pmatrix};\ |A|=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -19 & 12 & -10 \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}(96-95)=-\frac{1}{4}.$$

$$\text{Se trata de una cónica no degenerada, } A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1<0\Rightarrow \text{Hipérbola.}$$

$$\text{b) Su ecuación reducida: } C_1x^2+C_2y^2+C_3=0 \text{ cuya matriz es} \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Poniendo los invariantes}\begin{cases} |A|=-\frac{1}{4}=C_1C_2C_3 \\ A_{33}=-1=C_1C_2 \\ a_{11}+a_{22}=4=C_1+C_2 \end{cases}\Rightarrow C_3=\frac{1}{4}.$$

$$C_1=4-C_2;(4-C_2)C_2=-1\Rightarrow -C_2^2+4C_2+1=0;C_2^2-4C_2-1=0\Rightarrow C_2=2\pm\sqrt{5}.$$

$$1^{\text{o}}\text{Caso: } C_2=2+\sqrt{5}\Rightarrow C_1=2-\sqrt{5};C_3=\frac{1}{4}.$$

$$(2-\sqrt{5})x^2+(2+\sqrt{5})y^2+\frac{1}{4}=0;\ \frac{1}{4}=(\sqrt{5}-2)x^2-(2+\sqrt{5})y^2;1=4(\sqrt{5}-2)x^2-4(2+\sqrt{5})y^2.$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4(\sqrt{5}-2)}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4(2+\sqrt{5})}}=1, \text{ también racionalizando } \frac{x^2}{\frac{(\sqrt{5}+2)}{4}}-\frac{y^2}{\frac{(\sqrt{5}-2)}{4}}=1.$$

$$2^{\text{o}}\text{Caso: } C_2=2-\sqrt{5}\Rightarrow C_1=2+\sqrt{5};C_3=\frac{1}{4}.$$

$$(2+\sqrt{5})x^2+(2-\sqrt{5})y^2+\frac{1}{4}=0;\ \frac{1}{4}=-(\sqrt{5}+2)x^2+(\sqrt{5}-2)y^2;1=-4(\sqrt{5}+2)x^2+4(\sqrt{5}-2)y^2.$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4(\sqrt{5}-2)}}-\frac{x^2}{\frac{1}{4(\sqrt{5}+2)}}=1, \text{racionalizando } \frac{y^2}{\frac{(\sqrt{5}+2)}{4}}-\frac{x^2}{\frac{(\sqrt{5}-2)}{4}}=1.$$