1º Sean:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0 \text{ y } x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$
$$B = L\{(a,0,1,1),(0,1,2,1),(-1,3,4,1)\} \qquad a \in R$$

Hallar una base de cada uno de los subespacios y calcular su dimensión.

2º Dada la aplicación: $f : R^3 \to R^3 \,/\, f(x,y,z) = (x + 2y,\ y - z,\ x + 2z)$.

Demostrar que es una aplicación lineal y clasificarla.

3º Discutir el sistema:

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + ab\,z = a \\ bx + a^2 y + a^2 b\,z = a^2\,b \end{cases} \qquad a, b \in R$$

según los distintos valores de los parámetros que contiene.

4º Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta ortogonalmente (perpendicular) a la recta:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

5º Estudiar para qué valores de "**p**" y "**q**" la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} q & p & -q + 2 \\ p + 1 & 0 & 1 \\ q + 1 & p & 1 - q \end{pmatrix} \qquad p, q \in R$$

es diagonalizable.

6º Dada la cónica: $2x^2 - 3xy - 2x + 5y - 3 = 0$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha cónica en el punto de corte con el eje OY.
b) Clasificarla, hallando las rectas en las que se descompone o la ecuación reducida (según el caso).

Solución

1º

$$A = \{(x_1, x_2, x_1 - x_2, x_1 - x_2) / x_1, x_2 \in R\} = L\{(1,0,1,1),(0,1,-1,-1)\}$$

Como son linealmente independientes forman base $\Rightarrow \dim A = 2$.

$$r\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{si } a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Base de} B \begin{cases} \{(0,1,2,1),(-1,3,4,1)\} \Rightarrow \dim B = 2 \\ \{(0,0,1,1),(0,1,2,1),(-1,3,4,1)\} \Rightarrow \dim B = 3. \end{cases}$$

2º

a) $f\left((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)\right) = f\left((x_1,x_2,x_3)\right) + f\left((y_1,y_2,y_3)\right)$

1^{o} miembro $= \left((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2),(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3),(x_1 + y_1) + 2(x_3 + y_3)\right)$

2^{o} miembro $= \left(x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2x_3\right) + \left(y_1 + 2y_2, y_2 - y_3, y_1 + 2y_3\right) =$

$= \left((x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2),(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3),(x_1 + 2x_3) + (y_1 + 2y_3)\right)$

Son iguales por las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas de $(R,+,.)$.

b) $f\left(\alpha(x_1,x_2,x_3)\right) = \alpha f\left((x_1,x_2,x_3)\right)$

1^{o} miembro $= \left(\alpha x_1 + 2(\alpha x_2), \alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 + 2(\alpha x_3)\right)$

2^{o} miembro $= \left(\alpha(x_1 + 2x_2), \alpha(x_2 - x_3), \alpha(x_1 + 2x_3)\right)$

Son iguales por las propiedades de $(R,+,.)$.

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) = 2 \neq 3 \quad \text{no Sobre.}$$

$\dim\left(\ker(f)\right) = 1 \neq 0$ no Inyectiva.

Es un endomorfismo.

3º

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ a \\ a^2b \end{matrix}\right)}_{B} \Rightarrow |A| = a^2(a-b)^2.$$

1^{o} Caso $a \neq 0$ y $a \neq b$, $r(A) = 3 = r(B) =$ número de incógnitas.

Compatible Determinado.

2º Caso a=0.

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \Rightarrow r(A) = 1 \text{ y } r(B) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$$

3º Caso a=b.

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^3 \end{pmatrix}}_{B} \Rightarrow r(A) = 1 \text{ y } r(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } a = 1 \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado.} \\ 2 \text{ si } a \neq 1 \Rightarrow \text{Incompatible.} \end{cases}$$

4º Poniendo la ecuación de la recta en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \text{plano perpendicular a "r" que pasa por } (0,0,0)$$

$2x + y + z = 0.$

Hallando el punto de intersección de la recta con el plano;

$$x = \frac{-2}{3}, y = \frac{7}{6}, z = \frac{1}{6}$$

La recta pedida pasa por este punto y por (0,0,0).

$$\frac{x}{-4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{1}.$$

5º

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} q - \lambda & p & -q + 2 \\ p + 1 & -\lambda & 1 \\ q + 1 & p & 1 - q - \lambda \end{vmatrix} = (p + 2 - \lambda)(1 + \lambda)(p + \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = p + 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -p \end{cases}$$

1º Caso : $p + 2 \neq -1 \neq -p$, los tres valores propios distintos $\Rightarrow$ Diagonalizable

2º Caso : $p + 2 = -1 \Rightarrow p = -3$.

$\lambda = -1$ (doble), $\lambda = 3$ (simple)

$$A=\begin{pmatrix} q & -3 & -q+2 \\ -2 & 0 & 1 \\ q+1 & -3 & 1-q \end{pmatrix}; \quad A+1I=\begin{pmatrix} q+1 & -3 & -q+2 \\ -2 & 1 & 1 \\ q+1 & -3 & 2-q \end{pmatrix}$$

Para ser diagonalizable $r(A+1I)=1 \Rightarrow \dfrac{q+1}{-2}=\dfrac{-3}{1}=\dfrac{-q+2}{1}$

$\Rightarrow q=5.$

3º Caso : $p+2=-p \Rightarrow p=-1.$

$\lambda=1(\text{doble}), \lambda=-1(\text{simple})$

$$A=\begin{pmatrix} q & -1 & -q+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ q+1 & -1 & 1-q \end{pmatrix}; A-1I=\begin{pmatrix} q-1 & -1 & -q+2 \\ 0 & -1 & 1 \\ q+1 & -1 & -q \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} q-1 & -1 \\ q+1 & -1 \end{vmatrix} = -q+1+q+1=2\neq 0 \Rightarrow r(A-1I)=2\ \forall q \Rightarrow \text{No diagonalizable.}$$

4º Caso : $-1=-p \Rightarrow p=1.$

$\lambda=-1(\text{doble}), \lambda=3(\text{simple})$

$$A=\begin{pmatrix} q & 1 & -q+2 \\ 2 & 0 & 1 \\ q+1 & 1 & 1-q \end{pmatrix}; A+1I=\begin{pmatrix} q+1 & 1 & -q+2 \\ 2 & 1 & 1 \\ q+1 & 1 & 2-q \end{pmatrix}$$

Para ser diagonalizable $r(A+1I)=1 \Rightarrow \dfrac{q+1}{2}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{-q+2}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow q=1.$

6º

a) Punto de corte $y=\dfrac{3}{5}$ en coordenadas homogéneas $(0,3,5)$.

$$(X,Y,Z)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow -19X+25Y-15Z=0=-19x+25y-15.$$

b) $|A| = \frac{7}{4} \Rightarrow$ Cónica no degenerada. $A_{33} = -\frac{9}{4}$ Hipérbola.

$$C_1X^2 + C_2Y^2 + C_3Z^2 = 0. \text{ Invariantes} \begin{cases} C_1C_2C_3 = \frac{7}{4} \\ C_1C_2 = -\frac{9}{4} \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

$$C_3 = -\frac{7}{9},\ C_1 = \frac{2+\sqrt{13}}{2}, C_2 = \frac{2-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{14}{9(2+\sqrt{13})}} - \frac{y^2}{\frac{14}{9(\sqrt{13}-2)}} = 1.$$

$$C_3 = -\frac{7}{9},\ C_1 = \frac{2-\sqrt{13}}{2}, C_2 = \frac{2+\sqrt{13}}{2} Þ \frac{-x^2}{\frac{14}{9(\sqrt{13}-2)}} + \frac{y^2}{\frac{14}{9(\sqrt{13}+2)}} = 1.$$