ALGEBRA

1º.- a) Sean las bases $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de R^3.

Sabiendo que $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, $\vec{u}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, $\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3$.

Hallar la matriz de cambio de la base B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.

b) Sea "f" un endomorfismo del espacio vectorial (E,+, .) tal que:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) &= \vec{u}_1 + a\vec{u}_3 \qquad a \in R. \text{ Siendo } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} \text{ una base de E.} \\ f(\vec{u}_3) &= \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_4) &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \vec{u}_4 \end{aligned}$$

Clasificar el endomorfismo según los valores de "a".

2º.- Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro que contiene:

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a + 4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a + 2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a - 1 \end{cases} \qquad a \in R.$$

3º.- Dadas las rectas: $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ $\qquad s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{a} \qquad a \in R$.

a) Hallar el valor de "a" para que exista un plano que contenga a "r" y sea perpendicular a "s"

b) Calcular la distancia entre las rectas "r" y "s".

4º.- Sea: $f : R^3 \to R^3$ / f(x , y , z) = (y+z , x+z , x+y).

a) Hallar la matriz del endomorfismo .
b) Dicha matriz ¿es diagonalizable? En caso afirmativo calcular la base ortonormal tal que la matriz asociada sea diagonal y hallar la matriz P ortogonal.

5º.- Dado el haz de cónicas:

$$x^2 - y^2 - xy - 2x + y + a(x^2 - y^2 - 2x) = 0 \qquad a \in R.$$

a) Clasificar según los valores del parámetro.
b) Hallar la ecuación reducida para **a**=-2.

Soluciones

1º.- a) Matriz de cambio de B_2 a B_1:

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y la de } B_1 \text{ a } B_2 \text{ es } P^{-1}=\frac{-1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz del endomorfismo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & a & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ |A|=-1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=2(-1-a).$$

1º Caso si $a\neq -1, r(A)=4 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f))=4=$ dimensión del espacio final $\Rightarrow$ SOBRE.

Como la dimensión del espacio inicial es $4 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f))=0 \Rightarrow$ INYECTIVA.

Es un endomorfismo biyectivo $\Rightarrow$ Automorfismo.

2º $a=-1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f))=3 \text{ y } \dim(\mathrm{Ker}(f))=1, \text{no es ni "sobre" ni "inyectiva".}$$

Es un endomorfismo.

2º.- El determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2(a+1) & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix}=4^aF-3^aF=\begin{vmatrix} 2(a+1) & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ a-3 & 0 & a-3 \end{vmatrix}=1^aC-3^aC=\begin{vmatrix} a+2 & 3 & a \\ 2a & a+1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-3)\begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 2a & a+1 \end{vmatrix}=(a-3)\left[(a+2)(a+1)-6a\right]=(a-3)(a^2-3a+2)=(a-3)(a-1)(a-2).$$

1º Caso: $a\neq 1,2,3 \Rightarrow r(A)=3=r(B)=$ nº de incógnitas, "Compatible determinado".

2º Caso: $a=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ r(A)=2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\neq 0, \text{orlando } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(B)=2.$$

"Compatible indeterminado".

3º Caso: $a=2$.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\ r(A)=2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}\neq 0, \text{orlando } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r(B)=3.$

"Sistema incompatible".

3º Caso $a=3$.

$$A=\begin{pmatrix}8&3&3\\11&4&5\\11&4&5\end{pmatrix} \; r(A)=2 \text{ pues} \begin{vmatrix}8&3\\11&4\end{vmatrix}\neq 0, \text{orlando} \begin{vmatrix}8&3&7\\11&4&8\\11&4&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&7\\0&4&8\\0&4&2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r(B)=3$.

"Sistema incompatible".

3º.- a) El haz de planos que contienen a la recta "r":

$(x-y+z-1)+\lambda(2x+y-z-2)=0$, vector director $(1+2\lambda,-1+\lambda,1-\lambda)$, para ser perpendicular a "s": $\dfrac{1+2\lambda}{3}=\dfrac{-1+\lambda}{2}=\dfrac{1-\lambda}{a}\Rightarrow\begin{cases}2+4\lambda=-3+3\lambda\Rightarrow\lambda=-5.\\-6a=12\Rightarrow a=-2.\end{cases}$

b) $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=z\\z=z\end{cases}$ pasa por $(1,0,0)$ y su vector director $(0,1,1)$.

$A(1,0,0), B(2,-1,0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$.

$$\begin{vmatrix}3&2&a\\0&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2-a&a\\0&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&2-a\\1&-1\end{vmatrix}=-(-3-2+a)\Rightarrow\begin{cases}a=5 \text{ se cortan, distancia cero}\\a\neq 5 \text{ se cruzan.}\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&a\\0&1&1\end{vmatrix}=(2-a)\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k} \text{ su módulo } \sqrt{(2-a)^2+18}.$$

$$\text{La mínima distancia}=\frac{|a-5|}{\sqrt{(2-a)^2+18}}.$$

4º.- a) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

b) Por ser simétrica siempre es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2-\lambda&-\lambda&1\\2-\lambda&1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)(-1-\lambda)^2.$$

Vectores propios;

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -z \\ x - 2y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \text{ Un vector propio } (1,1,1).$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y - z, \text{ un vector propio el } (-1,1,0), \text{ obligando a que}$$

sea ortogonal a $(-y-z, y, z)$ tenemos: $y + z + y = 0 \Rightarrow z = -2y$, un vector $(1,1,-2)$.

$$\text{La base ortonormal es} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y la matriz de cambio de base ortogonal } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$5^{o}.-a) \begin{vmatrix} 1+a & \frac{-1}{2} & -a-1 \\ \frac{-1}{2} & -1-a & \frac{1}{2} \\ -a-1 & c & 0 \end{vmatrix} = 3^{a}F + 1^{a}F = \begin{vmatrix} 1+a & \frac{-1}{2} & -a-1 \\ \frac{-1}{2} & -1-a & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1)\left[-(1+a)^2 - \frac{1}{4} \right];$$

$$\left[-(1+a)^2 - \frac{1}{4} \right] < 0 \quad \forall a \in R \Rightarrow a = -1, \text{ se anula el determinante.}$$

1º Caso $a \neq -1 \Rightarrow$ Cónica no degenerada.

$$A_{33} = \left[-(1+a)^2 - \frac{1}{4} \right] < 0 \Rightarrow \text{Hipérbolas.}$$

$$2^{o} \text{ Caso } a = -1 \Rightarrow r \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$