ALGEBRA

1º.-a) Dada la matriz: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ descomponerla en suma de una

matriz simétrica y otra antisimétrica.

b) Sea $B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar X.

2º.- Estudiar el sistema según los valores del parámetro que contiene:

$$\begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + 2z - 2t = 0 \\ az - t = 0 \end{cases} \qquad a \in R.$$

3º.- Sea la aplicación lineal:

$f : R^3 \rightarrow R^3$ / $f(x, y, z) = (x+y+z, x+ay+z, x+y+bz)$ $a, b \in R$.

a) Clasificar la aplicación según los distintos valores de los parámetros **a** y **b.**

b) Caso de a=0 y b=-1, hallar la matriz de la aplicación en la base B.

$$B = \{(1,2,1), (0,3,5), (-1,0,2)\}.$$

4º.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular la base **ortonormal** donde la matriz asociada es diagonal y hallar la matriz P ortogonal.

5º.- En $(R^4, +, .)$ se considera los subespacios:

$$U = L\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,-3,1,-1)\},$$
$$W = L\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\}.$$

Calcular: $\mathrm{Dim}(U+W)$ y $\dim(U \cap W)$. ¿Son suplementarios?

Razonar la respuesta.

Solución

1º.-

a)

$$\left.\begin{array}{l} A = S + T \\ A' = S' + T' = S - T \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A') = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}; T = \frac{1}{2}(A - A') = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

.

b) $X = A.B.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 22 & -7 \end{pmatrix}.$

2º.-

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} A \text{ matriz de coeficientes.} \\ B \text{ matriz ampliada.} \end{cases}$$

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 2 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 2^{a}F - 1^{a}F = a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2(-1 + a).$$

1º Caso $a \neq 0$ y 1, $r(A) = 4 = r(B) = $ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible determinado.

2º Caso $a = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2 \text{ orlando para la ampliada}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2^{a}C + 1^{a}C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.}$$

3º Caso $a = 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$

El rango de la matriz ampliada puede valer 4, orlando

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B) = 4 \Rightarrow \text{Incompatible.}$$

3º.- La matriz de la aplicación en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2^{a}F - 1^{a}F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = (a-1)(b-1).$$

$\text{Dim } R^3 = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$

1º Caso.- Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el $r(A) = 3 = \dim \text{Im}(f)$ que coincide con la dimensión

del espacio final, luego la aplicación es **sobre.**

La $\dim \text{Ker}(f) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(f) = (0,0,0) \Rightarrow$ es **inyectiva.**

Se trata de un endomorfismo biyectivo $\Rightarrow$Es un **automorfismo.**

2º Caso.- Si $a=1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r(A) = 1 & \text{si } b = 1 \\ r(A) = 2 & \text{si } b \neq 1 \end{cases}$

En ambos casos no es ni **inyectiva** ni **sobre.** Es un endomorfismo.

3º Caso.- Si $b=1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r(A) = 1 & \text{si } a = 1 \\ r(A) = 2 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$

En ambos casos no es ni **inyectiva** ni **sobre.** Es un endomorfismo.

b) En este caso la matriz de la aplicación en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser un endomorfismo, al cambiar de base en el espacio inicial también se cambia en el final, por tanto la matriz de cambio de base P=Q.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 8 \\ 14 & 13 & -5 \\ -24 & -25 & 7 \end{pmatrix}.$$

4º.- La matriz por ser simétrica siempre es diagonalizable.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 2^{a}C + 3^{a}C = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 9-\lambda & 4 \\ 2 & 9-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = 3^{a}F - 2^{a}F =$$

$$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 9-\lambda & 4 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left[(8-\lambda)(1-\lambda)-8\right] = (9-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

Valores propios $\lambda = 9$ (doble), $\lambda = 0$ simple.

Cálculo de vectores propios:

$\lambda = 0$.

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 5y = -4z \\ 2x + 4y = -5z \end{cases} \Rightarrow 9y = -9z \Rightarrow y = -z; x = -\frac{z}{2}$$

$$Ker(f - 0e) = \left\{ (\frac{-z}{2}, -z, z) \right\} = L\{(-1, -2, 2)\} \Rightarrow \text{un vector propio } (-1, -2, 2)$$

$\lambda = 9$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow Ker(f - 9e) = \{(-2y + 2z, y, z)\}$$

un vector propio $(-2,1,0)$, el otro deberá ser ortogonal $\Rightarrow (-2,1,0)(-2y + 2z, y, z) = 0$.

$4y - 4z + y = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{5}z \Rightarrow$ un vector el $(2,4,5)$.

La base ortogonal será $\{(-1,-2,2),(-2,1,0),(2,4,5)\}$ dividiendo entre sus módulos tenemos la base ortonormal.

$\left\{ \frac{1}{3}(-1, -2, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5) \right\}$ La matriz en esta base es la diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

y la matriz P ortogonal es la de cambio de base= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

5º.- Dim U=3 pues el rango de la matriz formada por los tres vectores que

generan a U vale tres.

Dim W=2; Dim(U+W)=4 $\Rightarrow$ Dim $(U \cap W) = 1$.

No son suplementarios.