1º.- Estudiar y resolver, en los casos que sea posible, según los distintos valores de los parámetros que contiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+(a-1)y=1 \\ (a-1)x+(1-2a)y=-1 \qquad a,b\in R \\ x+(a-1)y=b \end{cases}$$

2º.- En R^2 se definen las siguientes operaciones:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$

$\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \frac{\alpha}{2}y) \quad \forall \alpha \in R$

Sabiendo que $(R^2,+)$ es grupo abeliano, estudiar las 4 condiciones que debe cumplir la operación externa para que $(R^2,+,\cdot)$ sea espacio vectorial sobre R.

3º.- Sea la aplicación lineal:

$$f : R^3 \to R^3 \;/\; f(x, y, z) = (x+5y+2z,\ x+2y-z,\ x+y+4z).$$

a) Hallar la matriz asociada a “f”.
b) Clasificar la aplicación.
c) Descomponer la matriz asociada a “f” en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

4º.- Dados el plano $x+y-2z+2=0$ y la recta r; $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$.

Calcular la recta simétrica de “r” respecto al plano.

5º.- Dado el haz de cónicas:

$$x^2-y^2-xy-2x+y+\lambda(x^2-y^2-2x)=0.$$

a) Obtener la cónica que pasa por el punto (0,-1) y hallar su ecuación reducida.
b) Hallar la polar del punto(0,-1)¿qué representa respecto a la cónica?

Solución

1º.- El rango de la matriz ampliada puede valer tres, entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ a-1 & 1-2a & -1 \\ 1 & a-1 & b \end{vmatrix} = 3^a F - 1^a F = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ a-1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix} = (b-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1-2a \end{vmatrix} =$$

$$1^a C + 2^a C = (b-1)\begin{vmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-2a \end{vmatrix} = a(b-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & 1-2a \end{vmatrix} = a(b-1)(1-2a+a-1) = -a^2(b-1)$$

1º Caso: $a \neq 0$ y $b \neq 1$, $r(B) = 3$, $r(A) < 3 \Rightarrow$ sistema incompatible.

(A matriz de coeficientes y B la matriz ampliada).

2º Caso: a=0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 1; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b \neq 1,\ r(B) = 2 \neq r(A) \Rightarrow \text{sistema incompatible} \\ b = 1,\ \ r(B) = r(A) = 1 < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.} \end{cases}$$

La solución en este caso será: x=1+y.

3º Caso: b=1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a-1 & 1 \\ a-1 & 1-2a & -1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1-2a \end{vmatrix} = 1^a C + 2^a C = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-2a \end{vmatrix} = a(1-2a+a-1) = -a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0, r(A) = 1 = r(B) \text{(caso ya estudiado anteriormente)} \\ a \neq 0, r(A) = 2 = r(B) = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \end{cases}$$

La solución del sistema:

$$\begin{cases} x+(a-1)y=1 \\ (a-1)x+(1-2a)y=-1 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & 1-2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1-2a \end{vmatrix}}=\frac{1-2a+a-1}{-a^2}=\frac{1}{a};\, y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 1-2a \end{vmatrix}}=\frac{-1-a+1}{-a^2}=\frac{1}{a} \quad (a\neq 0).$$

2º.- Comprobaremos las cuatro propiedades de la operación externa:

a) $\forall\alpha\in R,\ \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2 \quad \alpha\left[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right]=\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2).$

El primer miembro:

$$\alpha(x_1+x_2,y_1+y_2)=\left(\alpha^2(x_1+x_2),\frac{\alpha}{2}(y_1+y_2)\right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=\left(\alpha^2x_1,\frac{\alpha}{2}y_1\right)+\left(\alpha^2x_2,\frac{\alpha}{2}y_2\right)=\left(\alpha^2x_1+\alpha^2x_2,\frac{\alpha}{2}y_1+\frac{\alpha}{2}y_2\right).$$

Por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de números reales, los dos miembros son iguales.

b) $\forall\alpha,\beta\in R,\ \forall(x,y)\in R^2 \quad (\alpha+\beta)(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y).$

El primer miembro:

$$(\alpha+\beta)(x,y)=\left((\alpha+\beta)^2x,\ \frac{(\alpha+\beta)}{2}y\right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha(x,y)+\beta(x,y)=\left(\alpha^2x,\frac{\alpha}{2}y\right)+\left(\beta^2x,\frac{\beta}{2}y\right)=\left(\alpha^2x+\beta^2x,\ \frac{\alpha}{2}y+\frac{\beta}{2}y\right)=$$

$$=\text{propiedad distributiva}\left((\alpha^2+\beta^2)x,\ \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)y\right).$$

Los dos miembros son distintos, no se cumple la igualdad pues $(\alpha+\beta)^2\neq\alpha^2+\beta^2$.

c) $\forall \alpha,\beta \in R,\ \forall (x,y)\in R^2\ \ (\alpha.\beta)(x,y)=\alpha\big(\beta(x,y)\big).$

El primer miembro:

$$(\alpha.\beta)(x,y)=\left((\alpha.\beta)^2 x, \frac{(\alpha.\beta)}{2} y \right).$$

El segundo miembro:

$$\alpha\big(\beta(x,y)\big)=\alpha\left(\beta^2 x, \frac{\beta}{2} y\right)=\left(\alpha^2(\beta^2 x), \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta}{2} y\right)\right).$$

Los dos miembros son distintos, no se cumple la igualdad pues

$$\frac{(\alpha.\beta)}{2} \neq \frac{\alpha}{2}.\frac{\beta}{2}.$$

d) $1\in R,\ \forall (x,y)\in R^2\ \ 1(x,y)=(x,y).$

$$1(x,y)=\left(1^2 x, \frac{1}{2} y\right)=\left(x,\ \frac{1}{2} y\right)\neq (x,y) \Rightarrow \text{no se cumple la propiedad.}$$

3º.- a) La matriz asociada a "f" en las bases canónicas:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)=(1,1,1) \\ f(0,1,0)=(5,2,1) \\ f(0,0,1)=(2,-1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow A=M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \text{restando } 1^{\text{a}} \text{ fila a las demás} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}=(-3).2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-18\neq 0 \Rightarrow \dim\big(\mathrm{im}(f)\big)=3=\dim R^3 (\text{Final}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la aplicación es "sobre".

$\dim(\text{Inicial})=\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)+\dim\big(\mathrm{im}(f)\big)\Rightarrow \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}\Rightarrow$ "f" es inyectiva.

Es un endomorfismo biyectivo = automorfismo.

c) A=S+T, donde S es una matriz simétrica y T antisimétrica.

Hallando la traspuesta, por las propiedades y la definición de matriz simétrica y antisimétrica tenemos:

$$A^t = S - T \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{1}{2}(A + A^t) \\ T = \dfrac{1}{2}(A - A^t) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4º.- La recta y el plano no son paralelos luego se cortan:

$$r; \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \text{ sustituyendo en el plano } (3-\lambda) + (1+\lambda) - 2(2+2\lambda\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de intersección es $A(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3)$.

Hallando el punto simétrico del B(3,1,2) (punto de la recta “r”), la recta pedida será la que pasa por los puntos A y el simétrico de B.

Cálculo del punto simétrico:

Hallamos una recta perpendicular al plano que pase por B.

$$\left.\begin{matrix} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{matrix}\right\} \text{punto de corte con el plano } (3+\lambda) + (1+\lambda) - 2(2-2\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ es $C(\frac{8}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3})$.

Las coordenadas del punto simétrico $\begin{cases} \frac{8}{3} = \frac{3+x}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1+y}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} = \frac{2+z}{2} \Rightarrow z = \frac{10}{3} \end{cases}$

La recta pedida es la que pasa por los puntos $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},3\right)$ y $\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{10}{3}\right)$.

$$\frac{x-\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}-\frac{7}{3}} = \frac{y-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{z-\frac{10}{3}}{3-\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{x-\frac{7}{3}}{1} = \frac{y-\frac{1}{3}}{7} = \frac{z-\frac{10}{3}}{-2}.$$

5º.- a) La cónica que pasa por el punto (0,-1) cumplirá:

$-1-1+\lambda(-1) = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$

Sustituyendo queda $-x^2 + y^2 - xy + 2x + y = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \ |A| = -\frac{5}{4} \Rightarrow \text{Cónica no degenerada.}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow \text{Hipérbola.}$$

Ecuación reducida: $C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0.$

$$\text{Invariantes}\begin{cases} |A| = -\dfrac{5}{4} = C_1 C_2 C_3 \\ A_{33} = -\dfrac{5}{4} = C_1 C_2 \\ a_{11} + a_{22} = 0 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 1 \\ C_1 = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ C_2 = \mp\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{y^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 1; \quad \frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} - \frac{y^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 1.$$

b) La polar del punto (0,-1).

$$(X,Y,Z)\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (X,Y,Z)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}X - -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Z = 0 \text{ en cartesianas } \; 3x - y - 1 = 0.$$

Como el punto es de la cónica, la polar es la tangente a la cónica en dicho punto.