# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

**1º.-** Sea: $f: (\mathrm{R}^3,+,.) \rightarrow (\mathrm{R}^2,+,\ .)$

$$(x,y,z) \rightarrow (2x-y,\ z-x)$$

**a)** Calcular el Ker(f) y clasificar la aplicación lineal.
**b)** Hallar la matriz de la aplicación en las bases canónicas
**c)** Hallar la matriz cuando en el espacio inicial está la base canónica y en el final B=$\{(1,4),(-3,2)\}$.

**2º.-** Estudiar el sistema según los distintos valores de los parámetros **a** y **b**.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}x+y+z=1 \\ x+\mathbf{a}y+z=\mathbf{a} \\ x+y+\mathbf{a}z=2-\mathbf{a} \\ x+\mathbf{b}y+z=\mathbf{b} \end{array}\right\} \ \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathrm{R}$$

**3º**.- Dada la recta r: $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right.$ y el plano π: $x-2y-z+3=0$.

**a)** Hallar la distancia de la recta al plano.
**b)** Calcular un plano que contiene a **"r"** y es perpendicular a "**π**".

4º.- Hallar la potencia n-ésima de la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ utilizando la diagonalización.

**5º.**- Dado el haz de cónicas:

$$x^2-2\mathbf{a}xy+y^2+x+y-10=0 \quad a\in \mathrm{R}.$$

**a)** Clasificarlas según los valores de "**a**".
**b)** Caso de a=2, hallar la ecuación reducida.

**Soluciones**

**1º.- a)** Ker(f)= $\{(x,y,z)/ f(x,y,z)=(0,0)\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \Rightarrow y=2x \\ z-x=0 \Rightarrow z=x \end{cases}$

Ker(f)= $\{(x,2x,x)\} = L\{(1,2,1)\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1 \Rightarrow$ la aplicación no es inyectiva.

$\dim R^3 = \dim Ker(f) + \dim(Im(f)) \Rightarrow$
$\dim(Im(f)) = 2 = \text{dimensión del espacio final} \Rightarrow \text{la aplicación es Sobre.}$

**b)** Hallando las imágenes de los vectores de la base canónica

$f(1,0,0) = (2,-1);\ f(0,1,0) = (-1,0);\ f(0,0,1) = (0,1) \Rightarrow$
$M(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**c)** Llamando C a la matriz de la aplicación cuando en el espacio inicial está la base canónica y en el final la base dada, tenemos:

$C = Q^{-1}.A.I = Q^{-1}.A$ siendo Q la matriz de cambio de la canónica a la dada.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2º.-** La matriz de coeficientes como máximo puede ser de rango tres y la ampliada cuatro.

Empezaremos por la ampliada:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 2-a \\ 1 & b & 1 & b \end{vmatrix} = 2^a F - 1^a F = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & a & 2-a \\ 1 & b & 1 & b \end{vmatrix} =$$

$$1^a C \text{ la sumamos a la } 2^a C \text{ y a la } 4^a C \begin{vmatrix} a & 1+a & 1 & 1+a \\ 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3-a \\ 1 & b+1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} =$$

$-$

$$-(1-a).\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1+a \\ 2 & a & 3-a \\ b+1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = 3^a C - 1^a C = (a-1)\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 0 \\ 2 & a & 1-a \\ b+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(-1)(1-a)\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ b+1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1+a-b-1) = (a-1)^2(a-b).$$

**1º Caso.-** Si $\begin{cases} a \neq b \\ a \neq 1 \end{cases}$ r(B)=4 (B matriz ampliada) $\neq$ r(A) (A matriz de coeficientes) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

**2º Caso.-** a=1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } b = 1 \ r(A) = 1 = r(B) < n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado} \\ \text{ii) } b \neq 1 \ r(A) = 2 = r(B) < n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado} \end{cases}$$

**3º Caso.-** a=b.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 2-a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$$ la $2^a$ fila y la $4^a$ fila iguales, quitamos la $4^a$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2^a F - 1^a F = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1^a C + 2^a C = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a^2+a-2) = (a-1)(a-1)(a+2).$$

i) $a \neq 1$ y $-2 \Rightarrow r(A) = 3 = r(B) = n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible determinado.

ii) $a = 1$ como $b = a$ ya estudiado $\Rightarrow r(A) = 1 = r(B) \Rightarrow$ C. Indeterminado.

iii) a= -2. $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $2^a$fila=$4^a$fila.

r(A)=2, pero r(B)=3 pues $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3^{a}C - 2^{a}C = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9$.

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

**3º.- a)** Veremos la posición de la recta y el plano:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 - z \\ x - y = -2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 5z \\ y = -1 - 3z \\ z = z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-1,-1,0) \text{ punto de la recta.} \\ (-5,-3,1) \text{ vector director.} \end{array}\right.$$

Vector director del plano (1, -2, -1).El producto escalar de los dos vectores directores, el de la recta y el del plano dan cero$\Rightarrow$la recta y el plano son paralelos.

La distancia del punto (-1, -1, 0) al plano será la solución.

$$d(r,\pi) = \frac{|-1+2+3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ u.}$$

**b)** Calculamos el haz de planos que contienen a la recta:

$(2x - 3y + z - 1) + \lambda(x - y + 2z) = 0$. Entre ellos elegimos el que es perpendicular a "$\pi$". Para ello:

$(2+\lambda, -3-\lambda, 1+2\lambda),(1,-2,-1) = 0 \Rightarrow 2+\lambda+6+2\lambda-1-2\lambda = 0$.

$7+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -7 \Rightarrow$ el plano es $-5x + 4y - 13z - 1 = 0$.

**4º.-** Hallando los valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0 \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$$

Son simples, luego es diagonalizable. La matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

$D = P^{-1}.A.P \Rightarrow D^n = P^{-1}.A^n.P \Rightarrow A^n = P.D^n.P^{-1}$ donde P es la matriz de cambio de la base canónica a la formada por los vectores propios.

Calculando los vectores propios:

$$\lambda=-1;\quad \begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+2y=0\Rightarrow x=-2y\Rightarrow \text{un vector propio}\,(-2,1)\,.$$

$$\lambda=3;\quad \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow x=2y\Rightarrow \text{un vector propio}\,(2,1)\,.$$

$$P=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2(-1)^n+2.3^n & 4(-1)^{n+1}+4.3^n\\ (-1)^{n+1}+3^n & 2(-1)^n+2.3^n\end{pmatrix}.$$

**5º.- a)** La matriz es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -a & \frac{1}{2}\\ -a & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -10\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=1^{a}C-2^{a}C=\begin{vmatrix}1+a & -a & \frac{1}{2}\\ -a-1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -10\end{vmatrix}=2^{a}F+1^{a}F=$$

$$\begin{vmatrix}1+a & -a & \frac{1}{2}\\ 0 & 1-a & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & -10\end{vmatrix}=(1+a)\left[-10(1-a)-\frac{1}{2}\right]=(1+a)\left[10a-\frac{21}{2}\right].$$

**1º Caso.-** $a\neq -1,\ \dfrac{21}{20}\Rightarrow$ Cónica no degenerada. Estudiemos el

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{vmatrix}=1-a^2\Rightarrow\begin{cases}(-\infty,-1)\Rightarrow A_{33}<0\Rightarrow \text{Hipérbolas.}\\ (-1,1)\Rightarrow A_{33}>0\Rightarrow \text{Elipses.}\\ a=1\Rightarrow A_{33}=0\Rightarrow \text{Parábola.}\\ (1,\frac{21}{20})\Rightarrow A_{33}<0\Rightarrow \text{Hipérbolas.}\\ (\frac{21}{20},\infty)\Rightarrow A_{33}<0\Rightarrow \text{Hipérbolas}\end{cases}$$

**2º Caso.-** a=-1, r(A)=2$\Rightarrow$Dos rectas, pues:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -10 \end{pmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

**3º Caso.-** $a = \frac{21}{20}$.

$$r\begin{pmatrix} 1 & -\frac{21}{20} & \frac{1}{2} \\ -\frac{21}{20} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -10 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -\frac{21}{20} \\ -\frac{21}{20} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

**b)** Para a=2, por lo estudiado anteriormente se trata de una hipérbola cuya

$$\text{matriz es: } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3.\frac{19}{2}.$$

$$C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0 \Rightarrow \text{su matriz} \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Poniendo los invariantes} \begin{cases} |A| = 3.\frac{19}{2} \\ A_{33} = -3 = C_1.C_2 \\ a_{11} + a_{22} = 2 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{19}{2};\ C_1 = 2 - C_2 \Rightarrow -C_2^2 + 2C_2 + 3 = 0 \Rightarrow C_2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

i) $\quad C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = 3 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = \frac{19}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{19}{6}} - \frac{y^2}{\frac{19}{2}} = 1.$

ii) $\quad C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = -1 \Rightarrow -x^2 + 3y^2 = \frac{19}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{19}{6}} - \frac{x^2}{\frac{19}{2}} = 1.$