FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

1º.- Sean:

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \;/ \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\},$$

$$F = L\{(1, 2, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (1, 5, a, -2) \quad a \in R\} \quad \text{subespacios de } R^4.$$

Estudiar para que valores de “**a**”, $E \oplus F = R^4$ .Razonar la respuesta.

2º.- Estudiar el sistema según los distintos valores del parámetro que contiene.

$$\begin{cases} (2a+2)x + ay + 2z = 2a - 2 \\ 2x + \quad (2-a)y \quad = 0 \\ (a+1)x + \; (a+1)z = a - 1 \end{cases} \qquad a \in R.$$

3º.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular la base en la que la matriz asociada es diagonal y hallar la relación entre la matriz diagonal y la matriz A.

4º.- Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

a) Estudiar su posición
b) Hallar el punto simétrico de P (1, -1, 0) respecto a la recta “s”.

5º.- Dada la cónica: $x^2 + y^2 + 6\lambda xy + 4\lambda = 0 \quad \lambda \in R.$

Clasificarla según los distintos valores del parámetro que contiene.

Soluciones

1º.- $x_4 = x_1,\ x_2 = -x_1 - x_3 \Rightarrow E = \{(x_1, -x_1 - x_3, x_3, x_1)\} \Rightarrow L\{(1,-1,0,1),(0,-1,1,0)\}$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim E = 2.$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & a & -2 \end{pmatrix} \text{por lo menos es dos.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & a+1 \end{vmatrix} = 3(a+1) - 6 = 3(a-1); \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & a & -2 \end{pmatrix} = 4 \text{ y no depende de “a” pues } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim(E+F) = 4 \Rightarrow \text{como}$$

$E + F \subset R^4 \Rightarrow E + F = R^4$.
$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$ para ser suma directa nos hace falta que
$\dim(E \cap F) = 0 \Rightarrow \dim F = 2 \Rightarrow a = 1$.

Conclusión E y F son suplementarios o $E \oplus F = R^4$ cuando **a=1.**

2º.- $$\begin{vmatrix} 2(a+1) & a & 2 \\ 2 & 2-a & 0 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} 2(a+1) & a & 2 \\ 2 & 2-a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} 2a & a & 2 \\ 2 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a+1)[2a(2-a) - 2a] = (a+1)2a(2-a-1) = (a+1)2a(1-a).$$

1º Caso si $a \neq -1,0,1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(B) =$ nº de incógnitas **“compatible determinado”.**

2º Caso a=-1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$; r(A)=2, r(B)=3 **"incompatible".**

3º Caso a=0 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$; r(A)=2=r(B)< nº de incógnitas **"compatible indeterminado".**

4º Caso a=1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ la 1ª fila es la suma de la 2ª y 3ª$\Rightarrow$r(A)=2, es un sistema

homogéneo $\Rightarrow$infinitas soluciones.

3º.- $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$= sumando a la 1ª columna las demás

$$=\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 \\ 6-\lambda & 4-\lambda & 1 \\ 6-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Valores propios $\lambda=6$ simple y $\lambda=2$ doble.
Veamos si es diagonalizable:

Para $\lambda=2\Rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=1\Rightarrow \dim(\ker(f-2e))=2$= nº de veces que se repite, luego es diagonalizable.

Cálculo de los vectores propios:

a) $\lambda=6$ $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -3x+2y=-z \\ x-2y=-z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}\Rightarrow \mathrm{Ker}(f-6e)=\{(z,z,z)\}=L\{(1,1,1)\}$

un vector propio el (1,1,1).

b) $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y - z \Rightarrow \mathrm{Ker}(f - 2e) = \{(-2y - z, y, z)\} = L\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$

vectores propios (-2,1,0) y (-1,0,1).

La base en la que la matriz asociada es diagonal está formada por los tres vectores propios y la relación entre la matriz diagonal y la dada es:

$$D = P^{-1}AP \qquad \text{siendo } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4º.- a) Resolviendo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow$ la recta "r" pasa por el punto (1, -1, 0) y tiene como vector director (-2, 1, 1).

La recta "s" pasa por el punto (1, 5, -2) y su vector director es (3, 2, -1).

Por sus vectores directores, no son paralelas ni coincidentes, entonces se cortan o se cruzan.

Calculamos un vector que una un punto de la recta "r" con otro de la "s", por ejemplo el (0, 6, -2).

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{se cruzan.}$$

b) Hallamos el plano perpendicular "s" que pase por el punto P (1, -1, 0).

3x+2y-z+D=0 estos son los infinitos planos perpendiculares, elegimos el que pasa por el punto P $\Rightarrow$ 3-2+D=0 $\Rightarrow$ D=-1.

Dicho plano es: 3x+2y-z-1=0.

Calculamos la intersección de la recta "s" con el plano:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \qquad \text{sustituyendo en el plano} \quad 3(1 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) - 1 = 0.$$

$14\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = -1$. El punto es (-2, 3, -1) y es el punto medio entre el dado y el simétrico que buscamos.

Por tanto: $-2 = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow x = -5;\ 3 = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow y = 7; \quad -1 = \dfrac{z+0}{2} \Rightarrow z = -2.$

El simétrico es (-5, 7, -2).

5º.- $\begin{pmatrix} 1 & 3\lambda & 0 \\ 3\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix} = A \Rightarrow |A| = 4\lambda(1-9\lambda^2).$

a) Si $\lambda \neq 0, \pm\dfrac{1}{3}$ cónica no degenerada. Veamos de quién se trata:

$$A_{33} = 1-9\lambda^2 \begin{cases} (-\infty, -\frac{1}{3}) \text{es negativo} \Rightarrow \text{Hipérbolas} \\ (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{3}) \text{ es positivo} \Rightarrow \text{Elipses} \\ (\frac{1}{3}, \infty) \text{es negativo} \Rightarrow \text{Hipérbolas} \end{cases}$$

b) Si $\lambda = 0 \rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ dos rectas.

c) Si $\lambda = -\dfrac{1}{3} \rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ dos rectas.

d) Si $\lambda = \dfrac{1}{3} \rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ dos rectas.