FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II

1º.- Sean:

$$E=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2+x_3=0\end{array}\right.\right\},\ F=\{(ax_4,-ax_3,x_3,x_4)\ a\in R\}\quad \text{subespacios de } R^4.$$

¿Para que valores de "**a**" E y F son suplementarios?

2º.- Estudiar el sistema según los distintos valores de los parámetros que contiene.

$$\left\{\begin{array}{l} ax+y+az=1 \\ x+(b-1)y-z=0 \\ ax-y-3az=4\end{array}\right.\quad a,b\in R.$$

3º.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$.

¿Es diagonalizable? En caso afirmativo calcular la base en la que la matriz asociada es diagonal y hallar la relación entre la matriz diagonal y la matriz A.

4º.- Dado el plano $\pi: 2x-y+z+3=0$ y la recta $r: x-1=y+1=\dfrac{z}{3}$.

a) Hallar la ecuación de la recta que es paralela al plano π, es perpendicular a la recta "r" y pasa por el punto A (1, 2, -1).
b) Calcular la distancia del punto B (5, 6, 0) a la recta "r".

5º.- Dada la cónica: $\lambda^2x^2+y^2+2xy-2\lambda x+1=0 \quad \lambda\in R.$

a) Clasificarla según los distintos valores del parámetro que contiene.
b) Para $\lambda=1$ hallar la ecuación reducida.

Soluciones

1º.- Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow E = \{(-x_2, x_2, 2x_2, x_4)\} \Rightarrow L\{(-1,1,2,0),(0,0,0,1)\} \Rightarrow \dim E = 2.$$

$$F = L\{(a,0,0,1),(0,-a,1,0)\} \Rightarrow \dim F = 2 \quad \text{pues} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$E + F = L\{(-1,1,2,0),(0,0,0,1),(a,0,0,1),(0,-a,1,0)\}.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = -a(1+2a).$$

Para ser suplementarios $\begin{cases} E + F = R^4 \Rightarrow \dim(E+F) = 4 \\ E \cap F = (0,0,0,0) \Rightarrow \dim(E \cap F) = 0 \end{cases}$

Sabemos que $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \text{y} \\ a \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2º.- $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b-1 & -1 \\ a & -1 & -3a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & b-1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -3a & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b-1 & -1 \\ a & -1 & -3a \end{vmatrix} = 1^{a}\,\text{fila} + 3^{a}\,\text{fila} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & -2a \\ 1 & b-1 & -1 \\ a & -1 & -3a \end{vmatrix} = 1^{a}\,\text{colum} + 3^{a}\,\text{colum} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & b-1 & -1 \\ -2a & -1 & -3a \end{vmatrix} = -2a.(b-1).2a = -4a^2(b-1).$$

1º Caso.- Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$ $\Rightarrow$ el r(A) = 3 = r(B) = nº de incógnitas
$\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

2º Caso.- $a = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & b-1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2, \forall b \ \ (\text{no depende de "b"}).$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b-1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$$

3º Caso.- $b = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -3a \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2, \forall a \ \ (\text{no depende de "a"}).$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$$

3º.- $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 2^a \text{colum} + 3^a \text{colum} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= 2^a \text{fila} - 3^a \text{fila} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -1+\lambda \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(-2-\lambda)\left[(1-\lambda).(-1+\lambda)+9\right] =$$

$$(2+\lambda)(-\lambda^2+2\lambda+8)=-(2+\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \text{valores propios}\begin{cases}\lambda=-2 & \text{doble}\\ \lambda=4 & \text{simple}\end{cases}$$

Para $\lambda=-2$ veamos si es diagonalizable.

$$r\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}=1 \Rightarrow \dim[(\mathrm{Ker}(f+2e)]=2=\text{nº de veces que se repite} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Es diagonalizable.

La base estará formada por los vectores propios correspondientes a esos valores propios.

Cálculo de vectores propios.

$\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1-x_2+x_3=0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(f+2e)=\{(x_2-x_3,\ x_2,\ x_3)\}$$

$\Rightarrow$ vectores propios (1, 1, 0) y (-1, 0, 1).

$\lambda=4.$

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-9x_2+3x_3=-3x_1\\ -6x_2=-6x_1 \Rightarrow x_2=x_1 \text{ con la de arriba} \Rightarrow x_3=2x_1.\end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(f-4e)=\{(x_1,\ x_1,\ 2x_1)\} \Rightarrow$ vector propio $\Rightarrow (1,1,2)$

$D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$,matriz diagonal y la matriz de cambio de base de la

canónica a la formada por los vectores propios $\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

La relación pedida es $D=P^{-1}AP$.

4º.- a) La recta que nos piden debe estar en un plano que pase por el punto A (1, 2, -1) y sea paralelo al plano π.

2x-y+z+D=0$\Rightarrow$pasa por el punto A$\Rightarrow 2-2-1+D=0\Rightarrow D=1$.

Dicho plano será el **2x-y+z+1=0.**

También tendrá que estar en el plano perpendicular a la recta "r" que pasa por el punto A.

x+y+3z+D=0$\Rightarrow$pasa por A$\Rightarrow$1+2-3+D=0$\Rightarrow$D=0.

El plano será **x+y+3z=0.**

La recta solución es la intersección de los dos planos $\begin{cases}2x-y+z+1=0\\ x+y+3z=0\end{cases}$

b) Un punto de la recta P(1, -1, 0)$\Rightarrow \vec{PB}=(4,7,0)$,vector director de la

recta $\vec{d}(1,1,3)\Rightarrow \vec{d}\wedge\vec{PB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 7 & 0\end{vmatrix}=-21\vec{i}+12\vec{j}+3\vec{k}$.

su módulo es el área del paralelogramo determinado por ambos vectores

$\Rightarrow \sqrt{21^2+12^2+3^2} = \sqrt{3^2(7^2+4^2+1)} = 3\sqrt{66}$. Ahora si lo dividimos por el módulo del vector $\vec{d}$, tenemos la altura del paralelogramo que será la distancia pedida $\dfrac{3\sqrt{66}}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \dfrac{3\sqrt{66}}{\sqrt{11}} = 3\sqrt{6}$ u.

5º.- a) $\begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1^{a}\,\text{colum} - 2^{a}\,\text{colum} \begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)-\lambda^2 = -1 \neq 0\ \forall\lambda.$

Cónica “NO DEGENERADA”.

$$A_{33} = \lambda^2 - 1, \text{ estudiando los intervalos } \begin{cases} (-\infty,-1) \Rightarrow A_{33} > 0 \Rightarrow \text{Elipse.} \\ \lambda = -1 \Rightarrow A_{33} = 0 \Rightarrow \text{Parábola.} \\ (-1, 1) \Rightarrow A_{33} < 0 \Rightarrow \text{Hipérbola.} \\ \lambda = 1 \Rightarrow A_{33} = 0 \Rightarrow \text{Parábola.} \\ (1, \infty) \Rightarrow A_{33} > 0 \Rightarrow \text{Elipse} \end{cases}$$

b) Para $\lambda = 1$, sabemos que es una parábola.

$c_1y^2 + 2c_2x = 0$ (ecuación reducida) su matriz $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Poniendo los invariantes $\begin{cases} -1 = -c_1.c_2^2 \\ \lambda^2 + 1 = 2 = c_1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2$ y $c_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$2y^2 + \sqrt{2}\,x = 0 \qquad 2y^2 - \sqrt{2}\,x = 0.$