ALGEBRA

1º.- Clasificar la siguiente cónica: $2x^2 - 2y^2 - 3xy + 5x + 5y - 3 = 0$.

Según el resultado obtenido, hallar su ecuación reducida o

las rectas en que se descompone.

2º.- Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r:\ x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \text{y es paralelo a la recta} \quad s: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

3º.- Estudiar el sistema según los distintos valores de los parámetros **a** y **b**.

$$\left.\begin{array}{l} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + ay + a^2bz = a^2b \end{array}\right\} a,b \in R.$$

4º.- Dada la aplicación lineal $f: R^4 \to R^2$ cuya matriz asociada en las bases: $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz en las nuevas bases: $B_3 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $B_4 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, sabiendo que:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ \vec{e}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4 \\ \vec{w}_4 = \vec{v}_4 \end{cases}$$

5º.-Sea el espacio vectorial $(V_3, +, \cdot)$ sobre el cuerpo de los reales.

Demostrar que si los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman base, también es una base

la formada por los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2;\ \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2;\ \vec{v}_3 = \vec{u}_3.$$

6º.- Estudiar para qué valores de **a** y **b** la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ es diagonalizable.}$$

Solución

1º.- La matriz de la cónica:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix};|A|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \\ 5 & 5 & -6 \end{vmatrix}=2^aC-1^aC=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}=1^aF-7\cdot 2^aF=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 25 & 0 & -30 \\ -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}=\frac{5}{8}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{Cónica degenerada.}$$

$r(A)=2\Rightarrow$ dos rectas.

$$2x^2-x(3y-5)+(-2y^2+5y-3)=0\Rightarrow x=\frac{(3y-5)\pm\sqrt{(3y-5)^2-8(-2y^2+5y-3)}}{4}=$$

$$=\frac{(3y-5)\pm\sqrt{(5y-7)^2}}{4}=\begin{cases} \frac{8y-12}{4}=2y-3\Rightarrow x-2y+3=0. \\ \frac{-2y+2}{4}=\frac{1-y}{2}\Rightarrow 2x+y-1=0. \end{cases}$$

2º.- La recta “r” puesta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{matrix} 2x-y-4=0 \\ 3x-z-8=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{el haz de planos que contienen a "r":}$$

$(2x-y-4)+\lambda(3x-z-8)=0\Rightarrow$ vector director $(2+3\lambda,-1,-\lambda)$ eligiendo el perpendicular al $(3,2,1)\Rightarrow 6+9\lambda-2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$.

El plano pedido: $2(2x-y-4)-(3x-z-8)=0\Rightarrow x-2y+z=0$.

3º.- $A=$ matriz de coeficientes, $B=$ matriz ampliada

$$\left(\begin{matrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a & a^2b \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ a \\ a^2b \end{matrix}\right)\Rightarrow|A|=a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ b & 1 & ab \end{vmatrix}=2^aF-1^aF=a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ b & 1 & ab \end{vmatrix}=a^2(a-b)(1-b).$$

1^o Caso: $a \neq 0$, $a \neq b$ y $b \neq 1 \Rightarrow r(A) = r(B) = 3 = n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible Determinado.

2^o Caso: $a = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); r(A) = 1, r(B) = 2 \text{ independientemente del valor de "b".}$$

Sistema incompatible.

3^o Caso: $a = b$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a \\ a & a & a^3 & a^3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \\ a & a & a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ a & a & a^3 \end{vmatrix} = (1-a)a\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(1-a)^2.$$

i) $a = b \neq 0$ y $1 \Rightarrow r(B) = 3 > r(A) \Rightarrow$ Incompatible.

ii) $a = b = 0 \Rightarrow r(A) = 1, r(B) = 2$ (2^o Caso) $\Rightarrow$ Incompatible.

iii) $a = b = 1 \Rightarrow r(A) = 1 = r(B) \Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

4^o Caso: $b = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = a(1-a)(a^2-1).$$

i) Si $a \neq 0, 1$ y -1; $r(B) = 3 > r(A) \Rightarrow$ Incompatible.

ii) Si $a = 0, r(A) = 1, r(B) = 2 \Rightarrow$ Incompatible.

iii) Si $a = 1$, $r(A) = 1 = r(B) \Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

iv) Si $a = -1$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); r(A) = r(B) = 2 \Rightarrow$ Compatible Indeterminado.

4^o.- Las matrices de cambio de base son:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \; Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada en las nuevas bases:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5º.- Linealmente independientes:

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \alpha(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) + \beta(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0}.$$

$$(\alpha+2\beta)\vec{u}_1 + (2\alpha-\beta)\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0}, \text{como } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ son independientes} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha-\beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow \text{son linealmente independientes.}$$

Tres vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión tres forman un sistema de generadores $\Rightarrow$ forman base.

6º.- Hallando los valores propios:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ a & 1-\lambda & 2b \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - a\lambda - \lambda)) = \lambda(2-\lambda)(\lambda-a-1).$$

$$\text{Valores propios} \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=2 \\ \lambda=a+1 \end{cases}$$

1º Caso: $a \neq -1$ y 1, los valores propios son simples $\Rightarrow$ Diagonalizable

2º Caso: $a=-1 \Rightarrow \lambda=0$ es doble.

$$r\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2, \text{ no depende de "b"} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1 \neq 2, \text{No diagonalizable.}$$

3º Caso: $a=1 \Rightarrow \lambda=2$ es doble.

$$r\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \quad \text{si } b \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{No diagonalizable.} \\ 1 \quad \text{si } b = \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{diagonalizable.} \end{cases}$$