1º Dada la aplicación lineal: $f: R^4 \rightarrow R^3$ / $f(x, y, z, t) = (2x - y,\ x + y - z,\ z + t)$.

a) Clasificarla.

b) Sean:

$B_1 = \{(1, 2 - 1, 0), (1, 1, 0, 2), (-1, -1, 1, 1), (0, 1, 0, 2\}$.

$B_2 = \{(1, 1, 1), (0, 2, -1), (1, 3, 1)\}$

Hallar la matriz de la aplicación en las bases B_1 y B_2.

2º Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = b^2 \\ x + y + az = b \\ x + y + 2az = 2 \end{cases} \qquad a, b \in R.$$

3º Hallar la ecuación en forma continua de la recta proyección de:

$r \equiv x - 2 = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z - 1}{3}$ sobre el plano $x - y + 2z + 5 = 0$.

4º Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Encontrar una base ortonormal donde la matriz asociada sea diagonal. Hallar la relación entre la matriz diagonal y la dada.

5º Clasificar según los distintos valores del parámetro “a” las cónicas:

$$ax^2 + ay^2 - 2xy + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Obtener la ecuación reducida para a=2.

1º $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de la aplicación en las bases canónicas,

$r(A) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 =$ dimensión del espacio final $\Rightarrow$ Sobre.
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 \Rightarrow$ No inyectiva.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de cambio de la base canónica a B_1.

Q = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de cambio de la base canónica a B_2.

B matriz de la aplicación en las bases B_1 y B_2.

$$B = Q^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 & -10 \\ 2 & -2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ siendo } Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2º $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(a-1).$

A matriz de los coeficientes, B matriz ampliada.

1º Caso si a≠0 y 1, r(A)=3=r(B)=número de incógnitas⇒C.Determinado.

2º Caso a=0.

$$\underbrace{\left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} & \begin{matrix} b^2 \\ b \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}\right)}_{B} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = b - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{i) si } b \neq 2, r(B) = 3 \Rightarrow \text{Incompatible} \\ \text{ii) si } b = 2, r(B) = 2 \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado} \end{cases}$$

3º Caso a=1.

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}b^2\\b\\2\end{matrix}\right.\right)}_{B} \Rightarrow r(A) = 2;\ \begin{vmatrix}1&1&b^2\\1&1&b\\1&2&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&b^2-b\\1&1&b\\1&2&2\end{vmatrix} = b(b-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ \ \text{si}\ b \neq 0\ \text{y}\ 1, r(B) = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.} \\ \text{ii)}\ \ \text{si}\ b = 0, r(B) = 2 \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado.} \\ \text{iii)}\ \text{si}\ b = 1, r(B) = 2 \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado.} \end{cases}$$

3º La recta no está contenida en el plano.

Si calculamos un plano que contenga a la recta y sea perpendicular al plano donde la vamos a proyectar, la solución será la intersección de los dos planos.

Haz de planos que contienen a la recta:

(4x-y-8)+λ(3x-z-5)=0,vector director (4+3 λ,-1,- λ),eligiendo el que es

perpendicular al plano:

(4+3 λ, -1,- λ).(1,-1,2)= 4+3 λ+1-2λ=0; λ=-5.

El plano buscado es -11x-y+5z+17=0.

La recta proyección es la intersección de los planos:

$$\begin{cases} -11x - y + 5z + 17 = 0 \\ x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}z + 1 \\ y = \dfrac{9}{4}z + 6 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-6}{9} = \frac{z}{4}.$$

4º Es una matriz simétrica por lo tanto siempre es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ -6+\lambda & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0.$$

$\lambda = 3.$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = z \\ -x - y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow$$

$\mathrm{Ker}(f - 3\lambda) = \{(z,z,z), z \in R\}$.Un vector propio $(1, 1, 1)$.

$\lambda = 6.$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0.$$

$\mathrm{Ker}(f - 6\lambda) = \{(-y - z, y, z), y,z \in R\}$. Un vector propio $(-1,1,0)$.

El otro deberá cumplir $(-y - z, y, z).(-1,1,0) = 0 \Rightarrow 2y = -z$,
por ejemplo el $(1, 1, -2)$.

La base ortonormal $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ;P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{es ortogonal} \Rightarrow P^{-1} = P^{t}.$$

$D = P^{t}.A.P$

5º La matriz de las cónicas:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; |A| = \begin{vmatrix} a+1 & -1-a & 0 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (a+1)(-a-7).$$

1º Caso : a = -1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

2º Caso : a = -7.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \Rightarrow \text{Dos rectas.}$$

3º Caso : $a \neq -1$ y $-7 \Rightarrow$ Cónicas no degeneradas.

$A_{33} = a^2 - 1$, estudiando el signo :

$(-\infty, -1)$ positivo

$(-1, 1)$ negativo

$(1, \infty)$ positivo

Conclusión :

Elipses $(-\infty, -7) \cup (-7, -1) \cup (1, \infty)$.

Parábola $a = 1$.

Hipérbolas $(-1, 1)$.

Ecuación reducida para a=2.

Sabemos que es una elipse: $C_1x^2 + C_2y^2 + C_3 = 0$.

Poniendo los invariantes:

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -27 = C_1C_2C_3. \\ 4 = C_1 + C_2. \\ 3 = C_1C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -9 \\ C_1 = 3,\ 1 \\ C_2 = 1,\ 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 3y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{9} = 1. \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1. \end{cases}$$