Análisis Matemático

1º.- Dadas las ecuaciones:

$$y^{IV} - 2y''' + 17y'' = 3x + 1 + x\,e^{x} + (5x^{2} + 7)\mathrm{sen}4x.$$

$$y''' - 2y'' + 5y' = x^{2}e^{x} + \cos^{2}x + \frac{3}{2}.$$

a) Obtener la solución de la Homogénea.
b) Poner la **"forma"** de las soluciones particulares.

2º.- Resolver la ecuación:

$$x^{2}y'' - 4x\,y' + 6y = -9x^{2}.$$

3º.- Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 3y + t \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 5y + e^{t} \end{aligned}\right\}$$

1º.- En la primera ecuación, la ecuación característica

$$r^4-2r^3+17r^2=r^2(r^2-2r+17)=0\Rightarrow\begin{cases}r=0\,\text{doble}\\ r=1\pm\sqrt{1-17}=1\pm 4i\end{cases}$$

$$y_H=A+Bx+e^x(C\cos 4x+D\,\text{sen}\,4x)$$

Tendremos tres soluciones particulares:

$$f_1(x)=3x+1\Rightarrow y_{p_1}=x^2(E+Fx).$$
$$f_2(x)=7x\,e^x\Rightarrow y_{p_2}=(G+Hx)e^x.$$
$$f_3(x)=(x^2+1)\,\text{sen}4x\Rightarrow y_{p_3}=(I+Jx+Kx^2)\cos 4x+(L+Mx+Nx^2)\,\text{sen}4x.$$

En la segunda ecuación:

$$r^3-2r^2+5r=0=r(r^2-2r+5)\Rightarrow\begin{cases}r=0.\\ r=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2i.\end{cases}$$

$$y_H=A+e^x(B\cos 2x+C\,\text{sen}\,2x).$$

Para ver las particulares tendremos que poner $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ y nos

queda:

$$f_1(x)=x^2\,e^x\Rightarrow y_{p_1}=(D+Ex+Fx^2)e^x.$$
$$f_2(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\Rightarrow y_{p_2}=G\cos 2x+H\,\text{sen}2x.$$
$$f_3(x)=2\Rightarrow y_{p_3}=xI.$$

2º.- Es una ecuación de Euler:

Con el cambio $x=e^t\Rightarrow y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx}=y'_t.e^{-t}$.

$$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y'_t.e^{-t})}{dt}.\frac{dt}{dx}=(y''_t\,e^{-t}-y'_t.e^{-t})e^{-t}=(y''_t-y'_t)e^{-2t}.$$

Operando nos queda:

$$y''_t-5y'_t+6y_t=-9e^{2t}\Rightarrow r^2-5r+6=0\Rightarrow r=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases}r=3\\ r=2\end{cases}$$

$$y_H = Ae^{3t} + Be^{2t}$$
$$y_p = tCe^{2t} \Rightarrow y'_p = C(1+2t)e^{2t} \Rightarrow y''_p = C(2+2+4t)e^{2t}$$

Obligando a que cumpla la ecuación:

$$C(4+4t)e^{2t} - 5C(1+2t)e^{2t} + 6Cte^{2t} = -9e^{2t} \Rightarrow -C = -9 \Rightarrow C = 9$$
$$y_p = 9te^{2t}$$

Deshaciendo el cambio: $y = Ax^3 + Bx^2 + 9x^2 \ln x$.

3º.- Derivando en la primera ecuación:

$$x'' = 4x' + 3y' + 1 = 4x' + 3(2x + 5y + e^t) + 1 = 4x' + 6x + 15y + 3e^t + 1.$$

Despejando la **y** de la primera ecuación:

$$y = \frac{1}{3}(x' - 4x - t)$$
$$x'' = 4x' + 6x + 5(x' - 4x - t) + 3e^t + 1 \Rightarrow x'' - 9x' + 14x = 1 - 5t + 3e^t$$
$$r^2 - 9r + 14 = 0 \Rightarrow r = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} r = 7 \\ r = 2 \end{cases}$$
$$x_H = Ae^{2t} + Be^{7t}$$
$$1 - 5t \to x_{p_1} = C + Dt \begin{cases} x'_{p_1} = D \\ x''_{p_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - 9D + 14(C + Dt) = 1 - 5t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -9D + 14C = 1 \\ 14D = -5 \end{cases} \Rightarrow D = -\frac{5}{14} \qquad C = -\frac{31}{14^2}.$$
$$x_{p_1} = -\frac{31}{14^2} - \frac{5}{14}t.$$
$$3e^t \to x_{p_2} = Ee^t \begin{cases} x'_{p_2} = Ee^t \\ x''_{p_2} = Ee^t \end{cases} \Rightarrow (1 - 9 + 14)Ee^t = E3e^t \Rightarrow E = \frac{1}{2}.$$
$$x_{p_2} = \frac{1}{2}e^t.$$

$$x = Ae^{2t} + Be^{7t} - \frac{5}{14}t - \frac{31}{14^2} + \frac{1}{2}e^t.$$

$$y = \frac{1}{3}(x' - 4x - t) = \frac{1}{3}\left[2Ae^{2t} + 7Be^{7t} - \frac{5}{14} + \frac{1}{2}e^t - 4Ae^{2t} - 4Be^{7t} + \frac{20}{14}t + \frac{124}{14^2} - 2e^t - t\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[-2Ae^{2t} + 3Be^{7t} + \frac{27}{98} + \frac{3}{7}t - \frac{3}{2}e^t\right]$$