Análisis Matemático

Resolver las siguientes ecuaciones:

1º $(-x + 2y + 5)dx + (2x + y)dy = 0$.

2º $y' + 4y = y^2(\operatorname{sen}x + \cos x)$.

3º Hallar la solución de la ecuación homogénea e indicar la "**forma**" de las soluciones particulares (sin resolver), en las siguientes ecuaciones:

$y^{IV} - 2y''' + 5y'' = x^2e^x\cos 2x - x\operatorname{sen}2x + 7e^x\operatorname{sen}2x.$

$y''' - 5y'' + 6y' = 5x + \cos^2 x + (x^3 + 5)e^{2x}.$

4º Calcular: $L\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 3u}{2u}du\right\}$ indicando las propiedades aplicadas.

5º Hallar: $L^{-1}\left[\frac{s+5}{(s^2+8s+17)^2}\right]$.

6º Aplicando Transformada de Laplace resolver:

$y'' - 5y' + 6y = (12t - 7)e^{-t}$, $y(0)=y'(0)=0$.

7º Sea $f(x)=3x \qquad 0<x<1$

a) Obtener el desarrollo en serie de Fourier.
b) Desarrollar en términos de coseno.

Solución

1º $(-x + 2y + 5)dx + (2x + y)dy = 0$.

$$y' = \frac{x - 2y - 5}{2x + y} \quad \text{cambio} \quad \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \end{cases} \Rightarrow Y' = \frac{X - 2Y}{2X + Y}$$

Homogénea $Y = uX$.

$$u'X = \frac{1 - 2u}{2 + u} - u = \frac{-u^2 - 4u + 1}{2 + u} \Rightarrow \frac{-(2 + u)}{u^2 + 4u - 1}du = \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\ln(u^2 + 4u - 1) = \ln X + \ln k \Rightarrow X^2(u^2 + 4u - 1) = cte.$$

$$X^2\left[\frac{Y^2}{X^2} + 4\frac{Y}{X} - 1\right] = cte \Rightarrow Y^2 + 4YX - X^2 = cte, \quad \text{deshaciendo el cambio}:$$

$$(y + 2)^2 + 4(y + 2)(x - 1) - (x - 1)^2 = cte.$$

Es también **diferencial exacta** y la resolución sale más corta.

2º $y' + 4y = y^2(\text{senx} + \cos x)$.

Dividiendo entre y^2 tenemos:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{4}{y} = \text{senx} + \cos x, \text{ haciendo } \frac{1}{y} = z \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$-z' + 4z = \text{senx} + \cos x \Rightarrow \text{ecuación lineal} \quad (**)$$

Haciendo $z=u.v$ tenemos:

$$-(u'v + uv') + 4uv = \text{senx} + \cos x.$$

$$u(-v' + 4v) - u'v = \text{senx} + \cos x; \text{ haciendo } (-v' + 4v) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = 4dx \Rightarrow \ln v = 4x \Rightarrow v = e^{4x}.$$

$$-u'e^{4x} = \text{senx} + \cos x \Rightarrow u = -\int e^{-4x}(\text{senx} + \cos x)dx, \text{ cíclica.}$$

$$\int e^{-4x}(\text{senx} + \cos x)dx = -\frac{1}{4}e^{-4x}(\text{senx} + \cos x) + \frac{1}{4}\int e^{-4x}(\cos x - \text{senx})dx =$$

$$-\frac{1}{4}e^{-4x}(\text{senx} + \cos x) + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}(\cos x - \text{senx}) + \frac{1}{4}\int e^{-4x}(-\text{senx} - \cos x)dx\right] \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)\int e^{-4x}(\text{senx}+\cos x)\,dx = e^{-4x}\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)\text{senx}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\cos x\right\}\Rightarrow$$

$$\int e^{-4x}(\text{senx}+\cos x)\,dx = \frac{16}{17}e^{-4x}\left(\frac{-3}{16}\text{senx}+\frac{-5}{16}\cos x\right) = -\frac{1}{17}e^{-4x}(3\text{senx}+5\cos x)$$

$$u = \frac{1}{17}e^{-4x}(3\text{senx}+5\cos x)+C$$

$$\frac{1}{y} = z = uv = \frac{1}{17}\left(3\text{senx}+5\cos x+17Ce^{4x}\right)\Rightarrow y = \frac{17}{3\text{senx}+5\cos x+Ke^{4x}}.$$

Se puede resolver (**), también como ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, hallando la solución de la homogénea y la particular.

3º

$$r^4-2r^3+5r^2=0, r=0\,(\text{doble}), r=1\pm 2i.$$

$$y_H = (A+Bx)+e^x(C\cos 2x+D\text{sen}2x).$$

$$\begin{cases} y_{p1} = xe^x\left[(A_1+A_2x+A_3x^2)\cos 2x+(B_1+B_2x+B_3x^2)\text{sen}2x\right]. \\ y_{p2} = (C_1+C_2x)\cos 2x+(D_1+D_2x)\text{sen}2x. \end{cases}$$

$$r^3-5r^2+6r=0, \quad r=0, r=2, r=3.$$

$$y_H = A+Be^{2x}+Ce^{3x}.$$

$$5x+\cos^2 x+(x^3+5)e^{2x} = 5x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+(x^3+5)e^{2x}.$$

$$\begin{cases} y_{p1} = x(A_1+A_2x). \\ y_{p2} = B_1\cos 2x+B_2\text{sen}2x. \\ y_{p3} = x(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^{2x}. \end{cases}$$

4º

$$L\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 3u}{2u}\,du\right\} = \frac{L\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}\right\}}{s}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}\right) = 0 \Rightarrow L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}\right\} = \frac{1}{2}\int_s^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+36}\right)dz \ (*)$$

siendo $L\{\operatorname{sen}^2 3t\} = \frac{1}{2}L\{1-\cos 6t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36}\right)$.

$$(*) = \frac{1}{4}\left(\ln z - \frac{1}{2}\ln(z^2+36)\right)\Bigg|_s^{\infty} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{z^2}{z^2+36}\right)\Bigg|_s^{\infty} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{s^2+36}{s^2}\right).$$

Resultado; $\frac{1}{8}.\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+36}{s^2}\right)$.

5º

$$L^{-1}\left[\frac{s+5}{(s^2+8s+17)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{(s+4)+1}{\left((s+4)^2+1\right)^2}\right] = e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s^2+1)^2}\right].$$

$$f(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1};\ f'(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L^{-1}(f'(s)) = -tL^{-1}(f(s)) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}t.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}}{s}\right] = \int_0^t \frac{1}{2}u\,\mathrm{sen}u\,du = \frac{1}{2}(-t\cos t + \mathrm{sen}t).$$

Resultado; $\frac{1}{2}e^{-4t}(t\,\mathrm{sen}t - t\cos t + \mathrm{sen}t)$.

6º $y'' - 5y' + 6y = (12t-7)e^{-t}$, $y(0)=y'(0)=0$.

Aplicando la transformada:

$$(s^2 - 5s + 6)L\left[y\right] = \frac{12}{(s+1)^2} - \frac{7}{(s+1)} = \frac{5-7s}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$L\left[y\right] = \frac{5-7s}{(s+1)^2(s^2-5s+6)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-3)} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-3)} \Rightarrow y = te^{-t} + e^{2t} - e^{3t}$$

7º

a)

$$a_0 = \frac{1}{1/2}\int_0^1 3x\,dx = 3;\ a_k = \frac{1}{1/2}\int_0^1 3x\cos 2k\pi x\,dx = 6\left(\frac{x}{2k\pi}\operatorname{sen}2k\pi x + \frac{1}{(2k\pi)^2}\cos 2k\pi x\right)\Bigg|_0^1 = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{1/2}\int_0^1 3x\operatorname{sen}2k\pi x\,dx = 6\left(-\frac{x}{2k\pi}\cos 2k\pi x + \frac{1}{(2k\pi)^2}\operatorname{sen}2k\pi x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{6}{2k\pi}\cos 2k\pi = -\frac{3}{k\pi}.$$

x_0 puntos de discontinuidad $\pm k\ (k = 0,1,2,3......) \Rightarrow f(x_0) = \dfrac{3}{2}.$

x puntos de continuidad $\Rightarrow f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{k}\operatorname{sen}2k\pi x.$

b)

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 3x\,dx = 3;\ a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 3x\cos k\pi x\,dx = 6\left[\frac{x\operatorname{sen}k\pi x}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left[\frac{\cos k\pi - 1}{(k\pi)^2}\right].$$

$$x_0 \text{ puntos de discontinuidad } \begin{cases} 2k\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3......) \Rightarrow f(x_0) = 0. \\ 2k+1\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3......) \Rightarrow f(x_0) = 3. \end{cases}$$

x puntos de continuidad $\Rightarrow f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{\pi^2}\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$