Análisis Matemático

1º Resolver la ecuación diferencial:

$$y' + 3y - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

2º Hallar un factor integrante $\mu = \mu\left(\frac{x}{y^2}\right)$ para la ecuación:

$$(2y - 3xy^2)dx - xdy = 0.$$

Resolverla.

3º Obtener la solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y + e^t \end{cases}$$

4º Sea:

$$F(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 3 \\ 2t - 3 & t > 3 \end{cases}$$

Hallar $L\left[F(t)\right]$ y $L\left[F'(t)\right]$.

5º Calcular:

$$L^{-1}\left[\ln\left(3 + \frac{4}{s^2}\right)\right].$$

6º Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 2 - \dfrac{x}{2} & 2 \le x < 4 \end{cases}$$

f(2) ¿qué expresión tendrá en el desarrollo?

1º

$$u'v + uv' + 3uv = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow v(u' + 3u) + uv' = x^2 - 3x + 1.$$

$$u' + 3u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -3dx \Rightarrow \ln u = -3x\text{Þ}u = e^{-3x}.$$

$$e^{-3x}v' = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow v = \int e^{3x}(x^2 - 3x + 1)dx =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(x^2 - 3x + 1) - \int \frac{e^{3x}}{3}(2x - 3)dx =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(x^2 - 3x + 1) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \int \frac{e^{3x}}{9}2dx =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(x^2 - 3x + 1) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \frac{2e^{3x}}{27} + C.$$

$$y = e^{-3x}\left[\frac{e^{3x}}{3}(x^2 - 3x + 1) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \frac{2e^{3x}}{27} + C\right] =$$

$$= \frac{1}{27}\left(9x^2 - 33x + 20\right) + Ce^{-3x}.$$

2º

$$P = 2y - 3xy^2; \quad P_y = 2 - 6xy$$

$$Q = -x; \qquad Q_x = -1$$

$$t = \frac{x}{y^2}; \quad \mu(t) \Rightarrow \begin{cases} \mu_x = \mu'\left(\dfrac{1}{y^2}\right) \\ \mu_y = \mu'\left(\dfrac{-2x}{y^3}\right) \end{cases}$$

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \Rightarrow \mu'\left[\frac{-2x}{y^3}P - \frac{1}{y^2}Q\right] = \mu\left(Q_x - P_y\right) \Rightarrow$$

$$\mu'\left(\frac{x(-3 + 6xy)}{y^2}\right) = \mu(6xy - 3) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{y^2}{x} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln\mu = \ln t \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{x}{y}(2-3xy)dx-\frac{x^2}{y^2}dy=0.$$

$$F(x,y)=\frac{x^2}{y}+\alpha(x)\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{y}+\alpha'(x)=P=\frac{2x}{y}-3x^2\Rightarrow$$

.....

$$\alpha(x)=-x^3+cte.$$

$$\frac{x^2}{y}-x^3=K.$$

3º Derivando en la primera ecuación:

$$x''=4x'+3y'+1=4x'+3(2x+5y+e^t)+1=4x'+6x+15y+3e^t+1.$$

Despejando la **y** de la primera ecuación:

$$y=\frac{1}{3}(x'-4x-t)$$

$$x''=4x'+6x+5(x'-4x-t)+3e^t+1\Rightarrow x''-9x'+14x=1-5t+3e^t$$

$$r^2-9r+14=0\Rightarrow r=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=\begin{cases}r=7\\r=2\end{cases}$$

$$x_H=Ae^{2t}+Be^{7t}$$

$$1-5t\to x_{p_1}=C+Dt\begin{cases}x'_{p_1}=D\\x''_{p_1}=0\end{cases}\Rightarrow 0-9D+14(C+Dt)=1-5t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-9D+14C=1\\ \quad\quad 14D=-5\end{cases}\Rightarrow D=-\frac{5}{14}\qquad C=-\frac{31}{14^2}.$$

$$x_{p_1}=-\frac{31}{14^2}-\frac{5}{14}t.$$

$$3e^t\to x_{p_2}=Ee^t\begin{cases}x'_{p_2}=Ee^t\\x''_{p_2}=Ee^t\end{cases}\Rightarrow(1-9+14)Ee^t=E3e^t\Rightarrow E=\frac{1}{2}.$$

$$x_{p_2}=\frac{1}{2}e^t.$$

$$x=Ae^{2t}+Be^{7t}-\frac{5}{14}t-\frac{31}{14^2}+\frac{1}{2}e^t.$$

$$y=\frac{1}{3}(x'-4x-t)=\frac{1}{3}\left[2Ae^{2t}+7Be^{7t}-\frac{5}{14}+\frac{1}{2}e^t-4Ae^{2t}-4Be^{7t}+\frac{20}{14}t+\frac{124}{14^2}-2e^t-t\right]=$$

$$\frac{1}{3}\left[-2Ae^{2t}+3Be^{7t}+\frac{27}{98}+\frac{3}{7}t-\frac{3}{2}e^t\right]$$

4º

$$L\left[F(t)\right] = \int_0^3 te^{-st}dt + \int_3^\infty (2t-3)e^{-st}dt = \left.\left(\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right|_0^3 +$$

$$+\left.\left(\frac{(2t-3)e^{-st}}{-s} - \frac{2e^{-st}}{s^2}\right)\right|_3^\infty = \frac{e^{-3s}+1}{s^2} \text{ cuando } \quad s > 0.$$

$$F'(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 3 \\ 2 & t > 3 \end{cases}$$

Como F(t) es continua y F'(t) seccionalmente continua y de orden exponencial podemos aplicar la propiedad de la derivada:

$$L\left[F'(t)\right] = sL\left[F(t)\right] - F(0) = s\left(\frac{e^{-3s}+1}{s^2}\right) - 0 = \frac{e^{-3s}+1}{s}.$$

También se puede aplicar la definición de transformada a F'(t),obteniendo el mismo resultado.

5º

$$f(s) = \ln\left(3 + \frac{4}{s^2}\right) \Rightarrow f'(s) = \frac{-8}{s(3s^2+4)};$$

$$\frac{-8}{s(3s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{3s^2+4} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 6 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{-2}{s} + \frac{6s}{3s^2+4}\right] = -2 + \frac{6}{3}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \frac{4}{3}}\right] = -2 + 2\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)$$

$$L^{-1}\left[f'(s)\right] = -tL^{-1}\left[f(s)\right] \Rightarrow L^{-1}\left[f(s)\right] = \frac{2\left(1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)\right)}{t}.$$

6º Haciendo la representación gráfica es una función "par" de periodo $2l=4$

Los puntos de discontinuidad son: $x_0 = 4k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2....$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = 1.$$

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{k\pi}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left(\cos k\pi - 1\right)$$

$$\left(\cos k\pi - 1\right) = \begin{cases} -2 & \text{para k impar} \\ 0 & \text{para k par} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$$; x punto de continuidad

En los puntos de discontinuidad $f(x_0) = 0$.

$$f(2) = 1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{4}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}(-1) \Rightarrow \sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$