FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

1º.- Hallar: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 20)(\operatorname{sen} x - 1)}\,dx$.

2º.- Calcular el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 4 \text{ y el paraboloide } x^2 + \frac{y^2}{9} = \frac{3z}{2}$$

(la parte interior con respecto al paraboloide).

3º.- Resolver la ecuación diferencial:

$$(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0.$$

4º.- Dada la ecuación diferencial:

$$y^{v} + 4y''' = x + 3 + 5\cos^2 x + e^{x} \operatorname{sen} 4x.$$

a) Hallar la solución de la ecuación Homogénea.

b) Poner la “forma” de las soluciones particulares de la completa.

5º.- Resolver la ecuación:

$y'' + 4y = 9t$ con las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

Solución

1º.- Con el cambio senx = t, cosx dx =dt, tenemos:

$$\int \frac{dt}{(t^2+4t+20)(t-1)} \quad \text{racional}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t^2+4t+20)(t-1)} = \frac{At+B}{(t^2+4t+20)} + \frac{C}{(t-1)} \Rightarrow \begin{cases} (At+B)(t-1)+C(t^2+4t+20)=1 \\ t=1 \Rightarrow C=\frac{1}{25} \\ \text{coef}(t^2) \Rightarrow A+C=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{25} \\ \text{coef}(t) \Rightarrow B-A+4C=0 \Rightarrow B=-\frac{5}{25} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{25}\int \frac{t+5}{(t+2)^2+16}dt + \frac{1}{25}\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{1}{25}\int \frac{t+5}{16\left[\left(\frac{t+2}{4}\right)^2+1\right]}dt + \frac{1}{25}\ln(t-1) =$$

$$= \text{ con el cambio } \frac{t+2}{4} = z \Rightarrow dt = 4\,dz \Rightarrow -\frac{1}{25.16}\int \frac{4z+3}{z^2+1}(4dz) + \frac{1}{25}\ln(t-1) =$$

$$= -\frac{1}{100}\left(2\ln(z^2+1)+3\,\text{arctg}\,z\right) + \frac{1}{25}\ln(t-1) \text{ deshaciendo los}$$

$$\text{cambios} \Rightarrow -\frac{1}{100}\left[2\ln\left(\frac{t^2+4t+20}{16}\right) + 3\,\text{arctg}\left(\frac{t+2}{4}\right)\right] + \frac{1}{25}\ln(t-1) + K =$$

$$= -\frac{1}{100}\left[2\ln(\text{sen}^2x+4\text{sen}x+20)+3\,\text{arctg}\left(\frac{\text{sen}x+2}{4}\right)\right] + \frac{1}{25}\ln(\text{sen}x-1)+\text{cte}.$$

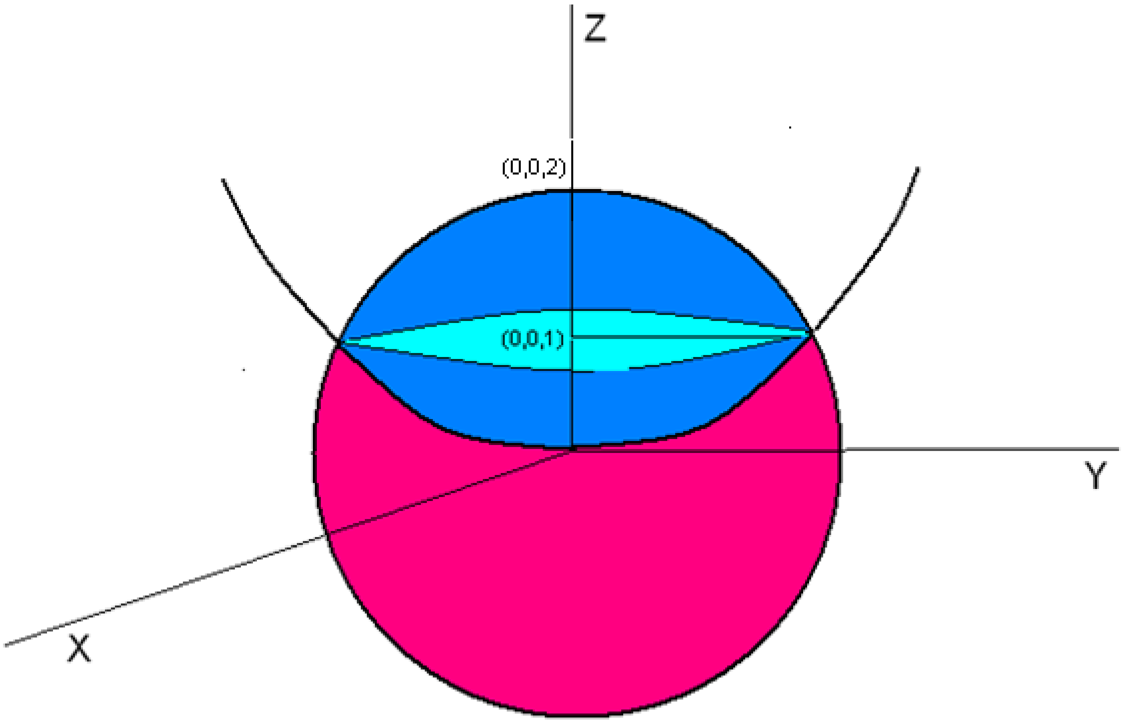
2º.- Con el cambio $\begin{cases} x = X \\ y = 3Y \\ z = 2Z \end{cases}$ el elipsoide pasa a ser la esfera $X^2+Y^2+Z^2=4$.

Y el paraboloide pasa de elíptico a circular $X^2+Y^2=3Z$.

Su intersección $Z^2+3Z-4=0 \Rightarrow Z = \begin{cases} 1 \\ -4 \text{ no vale} \end{cases}$

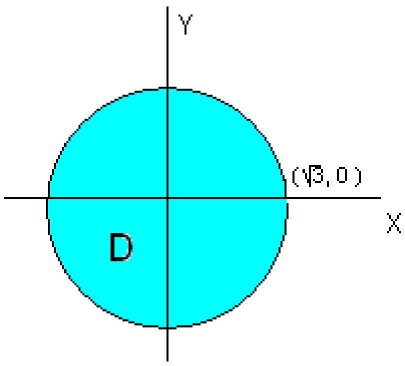
es $X^2 + Y^2 = 3$.

El Jacobiano de este cambio es 1.3.2= 6.



$$6\iint_D dX\,dY \int_{\frac{X^2+Y^2}{3}}^{\sqrt{4-X^2-Y^2}} dZ = 6\iint_D \left(\sqrt{4-X^2-Y^2} - \frac{X^2+Y^2}{3} \right) dX\,dY$$ pasando a

coordenadas polares donde D es:



$$6\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right) r\,dr = 12\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right) r\,dr = \text{haciendo por}$$

separado

$$\int \left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right) r\,dr = \begin{cases} 4-r^2 = t^2 \\ -2r\,dr = 2t\,dt \end{cases} \Rightarrow \int t(-t\,dt) - \int \frac{r^3}{3} dr = -\frac{\left(\sqrt{4-r^2}\right)^3}{3} - \frac{r^4}{12}$$

El volumen pedido=

$$12\pi\left(-\frac{\left(\sqrt{4-r^2}\right)^3}{3} - \frac{r^4}{12}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} \right) = 12\pi\left(-\frac{1}{3}-\frac{9}{12}+\frac{8}{3}\right) = \pi(-4-9+32) = 19\pi \text{ unidades}$$

de volumen.

3º.- $P = x + e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow P_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$

$$Q = e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y}) \Rightarrow Q_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y}) + e^{\frac{x}{y}}(-\frac{1}{y}) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

Es diferencial exacta.

$$F(x,y) = \int (x + e^{\frac{x}{y}})dx = \frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} + \alpha(y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} + y e^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}) + \alpha'(y) = Q = e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y}) \Rightarrow \alpha'(y) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = \text{cte}.$$

La integral general es: $\frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} = \text{Cte}.$

4º.- Ecuación característica: $r^5 + 4r^3 = r^3(r^2+4) = 0 \begin{cases} r = 0 \text{ triple} \\ r = \pm 2i \end{cases}$

a) Solución de la homogénea $y_H = A + Bx + Cx^2 + (D\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x)$.

b) $5\cos^2 x = \dfrac{5(1+\cos 2x)}{2} \Rightarrow f(x) = x + \dfrac{11}{2} + \dfrac{5}{2}\cos 2x + e^x \operatorname{sen} 4x$.

$y_{p_1} = x^3(A_1 + A_2 x)$ las constantes se calculan obligando a que cumpla la ecuación: $y_{p_1}^{V} + 4y_{p_1}''' = x + \dfrac{11}{2}$.

$y_{p_2} = x(B_1 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x)$ las constantes se calculan obligando a que cumpla la ecuación: $y_{p_2}^{V} + 4y_{p_2}''' = \dfrac{5}{2}\cos 2x$.

$y_{p_3} = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$ las constantes se calculan obligando a que cumpla la ecuación: $y_{p_3}^{V} + 4y_{p_3}''' = e^x \operatorname{sen} 4x$.

5º.- Aplicando la Transformada de Laplace:

$$s^2 L[y] - s.0 - 7 + 4L[y] = \frac{9}{s^2} \Rightarrow (s^2+4)L[y] = 7 + \frac{9}{s^2}$$

$$L[y] = \frac{7}{s^2+4} + \frac{9}{s^2(s^2+4)} \Rightarrow y = \frac{7}{2}\operatorname{sen} 2t + L^{-1}\left[\frac{9}{s^2(s^2+4)}\right].$$

$$\frac{9}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \quad \begin{cases} As(s^2+4) + B(s^2+4) + s^2(Cs+D) = 9 \\ s = 0 \Rightarrow B = \dfrac{9}{4} \\ \text{coef}\,(s) \quad 4A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \text{coef}\,(s^2) \quad B + D = 0 \Rightarrow D = -\dfrac{9}{4} \\ \text{coef}\,(s^3) \quad A + C = 0 \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{7}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{9}{4}t - \frac{9}{8}\operatorname{sen} 2t = \frac{9}{4}t + \frac{19}{8}\operatorname{sen} 2t.$$