CÁLCULO

1º.- Resolver: $$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4\left(-2+2\sqrt{3}\,i\right)^2}{(1+i)^8}.$$

Dando el resultado en todas las formas conocidas.

2º.- Sea:

$$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+x-2\right)}{\ln\left(x^2+2x-15\right)}$$

Clasificar los puntos de discontinuidad.

3º.- Desarrollar $f(x)=\sqrt{x}$ en potencias de $x-9$.

4º.- Sea: $$z(x,y)=\frac{y^2}{3x}+\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

a) Calcular: $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2$.

b) Calcular: $z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}$.

5º.- Hallar: $$\int\frac{4x+\sqrt{x+3}}{x-2\sqrt{x+3}}\,dx.$$

6º.- Dada: $$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z\,dz.$$

a) Representar el dominio V de integración.

b) ¿Interesa cambiar de coordenadas? Razonar la respuesta.

c) Calcular la integral.

Solución

1º.-

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}-i=2_{330^\circ}=2_{-30^\circ}\\ -2+2\sqrt{3}\,i=4_{120^\circ}\\ 1+i=\sqrt{2}_{\ 45^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\left(2_{-30^\circ}\right)^4\left(4_{120^\circ}\right)^2}{\left(\sqrt{2}_{\ 45^\circ}\right)^8}=\left(2^4\right)_{120^\circ}\text{ forma polar.}$$

$$2^4\left(\cos 120^\circ+i\operatorname{sen}120^\circ\right)\ \text{ forma trigonométrica}=2^4\left(-\cos 60^\circ+i\operatorname{sen}60^\circ\right)=$$

$$=2^4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=8\left(-1+\sqrt{3}i\right)\text{ forma binómica.}$$

2º.- $D\left(\ln(x^2+x-2)\right)=(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$.

$D\left(\ln(x^2+2x-15)\right)=(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$.

Como se tiene que poder calcular los dos $\Rightarrow(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$.

Al haber un cociente tenemos que quitar los ceros del denominador:

$x^2+2x-15=1\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{17}$.

$D(f)=(-\infty,-1-\sqrt{17})\cup(-1-\sqrt{17},-5)\cup(3,-1+\sqrt{17})\cup(-1+\sqrt{17},\infty)$.

Los puntos $x=-5,3$ son de discontinuidad inevitable de 2ª especie.

Los puntos $x=-1\pm\sqrt{17}$ inevitable de 1ª especie con salto infinito.

3º.- $f(x)=f(9)+f'(9)(x-9)+\dfrac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n}(9)}{n!}(x-9)^n+\ldots$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f(9)=3.$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(9)=\frac{1}{2\cdot 3}.$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f''(9)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3^3}.$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f'''(9)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3^5}.$$

$$f^{IV}(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}\Rightarrow f^{IV}(9)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{3^7}.$$

.

.

.

$$f^{(n}(x)=(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}\cdot x^{-\frac{(2n-1)}{2}}\Rightarrow f^{(n}(9)=(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}\cdot\frac{1}{3^{(2n-1)}}.$$

$$f(x)=3+\frac{1}{2\cdot 3}(x-9)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}\cdot\frac{1}{3^{(2n-1)}}\cdot\frac{1}{n!}(x-9)^n.$$

$$4^{\text{o}}.-\ z_x=-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{2x}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right);\qquad z_y=\frac{2y}{3x}-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

$$\text{a) } x^2\cdot\left(-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{2x}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)-xy\cdot\left(\frac{2y}{3x}-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)+y^2=\frac{3x^3}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

$$\text{b) } z_{xx}=\frac{2y^2}{3x^3}+\frac{2}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{4x^2}{y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

$$z_{xy}=-\frac{2y}{3x^2}-\frac{2x}{y^2}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)+\frac{2x^3}{y^3}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{y}\right)=z_{yx}.$$

$$z_{yy}=\frac{2}{3x}+\frac{2x^2}{y^3}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^4}{y^4}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

5º.- Haciendo el cambio: $x+3=t^2,\ dx=2t\,dt.$

$$\int\frac{4(t^2-3)+t}{(t^2-3)-2t}\cdot 2t\,dt=2\int\frac{4t^3+t^2-12t}{t^2-2t-3}dt=2\left[\int(4t+9)dt+\int\frac{18t+27}{t^2-2t-3}dt\right]=$$

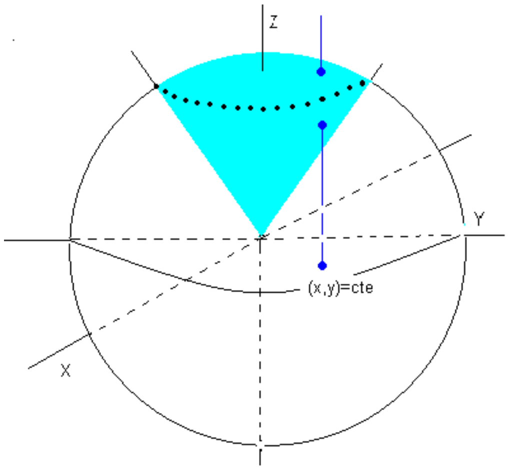
$$=2\left[2t^2+9t+9\int\frac{2t+3}{t^2-2t-3}dt\right]=2\left[2t^2+9t+9\int\left(\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t+1}\right)dt\right]=$$

$$=2\left[2t^2+9t+9\int\left(\frac{\frac{9}{4}}{t-3}+\frac{\frac{-1}{4}}{t+1}\right)dt\right]=4t^2+18t+\frac{81}{2}\ln(t-3)-\frac{9}{2}\ln(t+1)+cte.$$

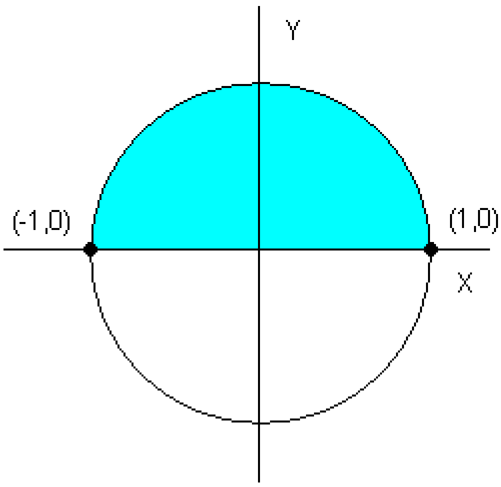
Deshaciendo el cambio:

$$4(x+3)+18\sqrt{x+3}+\frac{9}{2}\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x+3}-3\right)^9}{\left(\sqrt{x+3}+1\right)}\right]+cte.$$

6º.- Tenemos la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



El dominio V de integración es la mitad de la figura "azul" pues la proyección sobre el plano z=0 es la mitad del círculo $x^2+y^2=1$.



Las coordenadas que nos facilitan la resolución son las cilíndricas:

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz = 1-x^2-y^2 \Rightarrow \text{polares} \Rightarrow \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr = \pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$