FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

1º.- Dada: $$\int_4^8 dy \int_0^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

a) Invertir el orden de integración.
b) Pasar a coordenadas polares.

2º.- Hallar $$\iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}}}\,dx.dy.dz\,.$$

Siendo V el elipsoide $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$ en $z\geq 0$.

3º.- Resolver: $$\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx-\left(\frac{x^2+y^2}{x\,y^2}\right)dy=0.$$

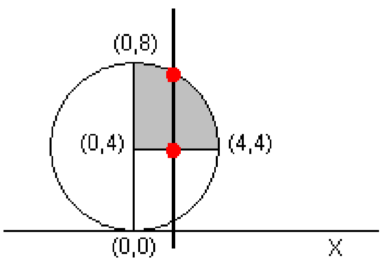
4º.- Resolver: $$y'+\frac{y}{1-x^2}-\sqrt{x+1}=0\,.$$

5º.- Sea: $y'''-2y''+5y'=5xe^x+\cos^2 x+7.$

a) Hallar la solución de la homogénea.
b) Poner la **“forma”** de las particulares y calcular una de ellas.

Solución

1º.-

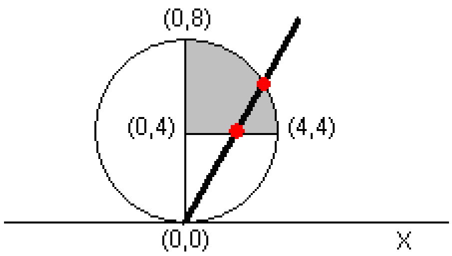


$$x^2+y^2-8y=0=x^2+(y-4)^2=16\Rightarrow y=4\pm\sqrt{16-x^2}\ .$$

a) $\displaystyle\int_0^4 dx\int_4^{4+\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy$ **.**

b) En polares: $x^2+y^2-8y=0\Rightarrow r^2-8r\,sen\alpha=0\Rightarrow r=8sen\alpha$.

Y la recta $y=4\Rightarrow r\,sen\alpha=4\Rightarrow r=\dfrac{4}{sen\alpha}$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\int_{\frac{4}{sen\alpha}}^{8sen\alpha} f(r\cos\alpha, r\,sen\alpha)\,r\,dr\ .$$

2º.- Haciendo el cambio:

x=2X , y=Y, z=3Z el Jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,X)}=6$ y la integral nos queda

$$\iiint_D e^{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\,6\,dX\,dY\,dZ$$ siendo D la esfera $X^2+Y^2+Z^2=1$ en $Z\geq 0$

Pasando a coordenadas esféricas:

$$6\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \int_0^1 e^r r^2 \cos\beta\, dr = 6\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^1 e^r r^2\ dr = 12\pi(e-2).$$

$$\int e^r r^2\, dr = e^r r^2 - \int 2r\, e^r\, dr = e^r r^2 - 2(r\,e^r - \int e^r dr) = e^r r^2 - 2r\,e^r + 2e^r.$$

$$\int_0^1 e^r r^2\ dr = e^r r^2 - 2r\,e^r + 2e^r\Big|_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta = \operatorname{sen}\beta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{y la otra integral} \quad \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi.$$

3º.- $P = 2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y} = 2x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{x^2} \Rightarrow P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}$ **.**

$$Q = -\frac{x^2+y^2}{xy^2} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Es diferencial exacta.

$$F(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)dy = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \alpha(x).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} + \alpha'(x) = P = 2x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \Rightarrow \alpha'(x) = 2x \Rightarrow \alpha(x) = x^2 + cte$$

La integral general $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + x^2 = Cte$ **.**

4º.- Es una ecuación lineal

$y = u.v \Rightarrow y' = u'v + uv'$ sustituyendo en la ecuación:

$$u'v + uv' + \frac{u.v}{1-x^2} - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow v\left(u' + \frac{u}{1-x^2}\right) + uv' - \sqrt{x+1} = 0 \text{ ,haciendo}$$

$$u' + \frac{u}{1-x^2} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x^2-1} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x^2-1} \Rightarrow \ln u = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\big(\ln(x-1) - \ln(x+1)\big)$$

$$u=\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}} \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}}v'=\sqrt{x+1} \Rightarrow dv=\frac{(x+1)}{\sqrt{x-1}}dx \Rightarrow v=\int\frac{(x+1)}{\sqrt{x-1}}dx.$$

Haciendo el cambio $\begin{cases} x-1=t^2 \\ x+1=t^2+2 \\ dx=2t\,dt \end{cases} \quad \Rightarrow \int\frac{t^2+2}{t}2t\,dt=2\int(t^2+2)dt=2(\frac{t^3}{3}+2t).$

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+4\sqrt{x-1}+cte.$$

$$y=u.v=\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}}.\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+4\sqrt{x-1}+cte\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{2}{3}(x-1)^2+4(x-1)+cte\sqrt{x-1}\right).$$

5º.- Sustituyendo $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$ la ecuación queda:

$$y'''-2y''+5y'=5xe^x+\frac{1}{2}\cos2x+\frac{15}{2}.$$

Ecuación característica: $r^3-2r^2+5r=0$ sus raíces $\begin{cases} r=0 \\ r=1\pm2i \end{cases}$

a) $y_H=A\,e^{0.x}+e^{1.x}(B\cos2x+C\,\mathrm{sen}2x)=A+e^x(B\cos2x+C\,\mathrm{sen}2x).$

b) Hay tres particulares:

$y_{p1}=(D+Ex)e^x$ las dos constantes se calcularán obligando a cumplir la ecuación:
$y_{p1}'''-2y_{p1}''+5y_{p1}'=5xe^x.$

$y_{p2}=F\cos2x+G\,\mathrm{sen}2x$ las constantes se calcularán obligando a cumplir:
$y_{p2}'''-2y_{p2}''+5y_{p2}'=\frac{1}{2}\cos2x.$

$y_{p3}=x.H$ resolveremos esta: $y_{p3}'=H,\quad y_{p3}''=0,\quad y_{p3}'''=0$

$$y_{p3}'''-2y_{p3}''+5y_{p3}'=5H=\frac{15}{2}\Rightarrow H=\frac{3}{2}\Rightarrow y_{p3}=\frac{3}{2}x.$$