CALCULO

1º Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x-3} & x > 2 \\ x^2 - 4 & -2 \leq x < 2 \\ (x+2)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2+7x+10}\right) & x < -2 \end{cases}$$

Clasificar los puntos de discontinuidad.

2º Desarrollar $f(x) = \sqrt{x}$ en potencias de x-1.

3º Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) Hallar el gradiente de la función en P(-1,0).

b) ¿En qué dirección la derivada es máxima? Calcularla.

4º Calcular $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 2}\,dx$.

5º Dada $\displaystyle\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz$

a) Representar el V de integración.

b) ¿Interesa cambiar de coordenadas?

c) Calcula dicha integral.

6º Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ limitado por el eje OX.

Solución

1º Dominio: $R - \{-5,2,3\}$.

$$x = -5 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -5^-} (x+2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x+2)(x+5)} = \dfrac{3\pi}{2}. \\ \lim\limits_{x \to -5^+} (x+2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x+2)(x+5)} = -\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto finito.

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} (x+2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x+2)(x+5)} = 0. \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$f(-2) = 0 \Rightarrow$ Es continua.

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0. \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x-3} = 0. \end{cases}$$

Como no está definida en $x = 2$ es una discontinuidad evitable.

$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x-3} = -\infty. \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x-3} = \infty. \end{cases}$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto infinito.

2º

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow f^{IV}(1) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}$$

.

.

.

$$f^{(n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}1.3.5.7.....(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{(2n-1)}{2}} \Rightarrow f^{(n}(1) = \frac{(-1)^{n+1}1.3.5.7.....(2n-3)}{2^n}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}1.3.5.7.....(2n-3)}{2^n.n!}(x-1)^n$$

3º a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \Rightarrow f_x(-1,0) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x \Rightarrow f_y(-1,0) = 3$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_{(-1,0)} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$

b) La derivada en el punto “P” alcanza su valor máximo en la dirección del vector gradiente.
Su valor es $\sqrt{18}$.

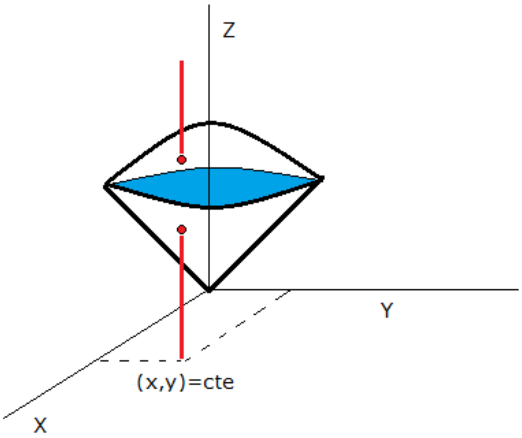
4º

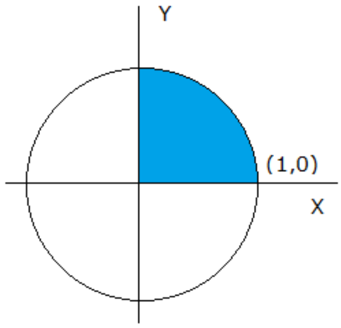
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}dx = \text{ (cambio } e^x = t) = \int \frac{t}{t^2+2t+2}dt =$$

$$\int \frac{t}{(t+1)^2+1}dt = \text{ (cambio } t+1=u) = \int \frac{u-1}{u^2+1}du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \text{arctg}\,u + cte = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+2) - \text{arctg}(e^x+1) + cte.$$

5º





$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2=z^2 \end{array}\right\}$$ La esfera y el cono se cortan a la altura de z = 1.

$$\iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_D \left(2-x^2-y^2-(x^2+y^2)\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_D (1-x^2-y^2)dxdy$$ siendo D el cuarto de círculo de la figura.

Pasando a coordenadas polares :

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^1 (1-r^2)rdr = \frac{\pi}{8}.$$

En coordenadas esféricas :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\,\mathrm{sen}\beta\,d\beta \int_0^{\sqrt{2}} r^3dr = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\cos 2\beta}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

6º

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \text{funcion par} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}dx = \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \sqrt{6}.$$