FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

1º.- Hallar: **a)** Dominio de f(x).
b) Puntos de discontinuidad y clasificarlos.

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2} & x<2\\ e^{\frac{-1}{x-2}} & 2<x<3\\ \dfrac{1}{x-6} & x\geq 4\end{cases}$$

2º.- Hallar la derivada de la función:

$$f(x)=\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen}x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen}x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen}x}.$$ Simplificar el resultado.

3º.- Hallar $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en la función: $\begin{cases}x=t^2-t+1\\ y=t^2+t+1\end{cases}$

4º.- Obtener **y'** en $x^y=y^x$.

5º.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

6º.- Dada la función $f(x)=x.\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$.

Hallar el dominio y las asíntotas.

Solución

1º.- a) $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,3)\cup\left[4,6\right)\cup(6,\infty)$.

b) x=2.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{-1}{(2+h)-2}}=e^{-\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left[(2-h)-2\right]\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(2-h)-2}=0.(-\dfrac{\pi}{2})=0.\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0.$$

Como no está definida en x=2 $\Rightarrow$ Punto de **discontinuidad evitable.**

x=3.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ \text{No existe.}\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{-1}{(3-h)-2}}=e^{-1}.\end{array}\right\}$$

x=3 $\Rightarrow$ **discontinuidad inevitable de 2ª especie.**

x=4.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{(4+h)-6}=-\dfrac{1}{2}.\\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ \text{No existe.}\end{array}\right\}$$

Discontinuidad inevitable de 2ª especie.

x=6.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{(6+h)-6}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{(6-h)-6}=-\infty\end{array}\right\}$$

Inevitable de 1ª especie con salto infinito.

2º.- $f(x)=\ln\left|1+\sqrt{\operatorname{sen}x}\right|-\ln\left|1-\sqrt{\operatorname{sen}x}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen}x}.$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{sen}x}}.\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}.\cos x-\frac{1}{1-\sqrt{\operatorname{sen}x}}.\left[\frac{-1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}.\cos x\right]$$

$$+2\frac{1}{1+(\sqrt{\operatorname{sen}x})^2}.\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}.\cos x=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{sen}x}}+\frac{1}{1-\sqrt{\operatorname{sen}x}}+\frac{2}{1+\operatorname{sen}x}\right]=$$

$$=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left[\frac{(1-\sqrt{\operatorname{sen}x})+(1+\sqrt{\operatorname{sen}x})}{(1-\operatorname{sen}x)}+\frac{2}{1+\operatorname{sen}x}\right]=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left[\frac{2}{1-\operatorname{sen}x}+\frac{2}{1+\operatorname{sen}x}\right]=$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}\left[\frac{(1+\operatorname{sen}x)+(1-\operatorname{sen}x)}{1-\operatorname{sen}^2x}\right]=\frac{2\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}x}.\cos^2x}=\frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen}x}.\cos x}.$$

3º.-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{2t+1}{2t-1}=g(t).\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=g'(t)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-4}{(2t-1)^2}\Big/(2t-1)=\frac{-4}{(2t-1)^3}=h(t).$$

$$\Rightarrow\frac{d^3y}{dx^3}=h'(t)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{24}{(2t-1)^4}\Big/(2t-1)=\frac{24}{(2t-1)^5}.$$

4º.- Tomando neperianos $y\ln x = x\ln y.$

$$y'\ln x + y.\frac{1}{x}=\ln y + x.\frac{y'}{y}$$

$$y'\left[\ln x-\frac{x}{y}\right]=\ln y-\frac{y}{x}\quad\Rightarrow y'=\frac{y\left[x\ln y-y\right]}{x\left[y\ln x-x\right]}.$$

5º.- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}=0^0.$

$A=e^{\ln A}\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x.\ln(\pi-2x)}$. El límite del exponente es $0.(-\infty)$, aplicando L´Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\ln(\pi-2x)\Big/\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-2}{\pi-2x}\Big/\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos^2 x}{(\pi-2x)\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{sen}x}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos^2 x}{(\pi-2x)}=1.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos x.\operatorname{sen}x}{-2}=0\Rightarrow e^0=1.$$

6º.- El dominio de la función es $(-\infty,-4)\cup[0,\infty)$.

Asíntota vertical x=-4, por la izquierda pues

$$\lim_{x\to-4^-}x\sqrt{\frac{x}{x+4}}=-\infty.$$

Horizontales no tiene $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (derecha) y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (izquierda).

Oblicuas $y=mx+b.$

Derecha

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+4}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x.\left(\frac{x-(x+4)}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})\sqrt{x+4}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})\sqrt{x+4}}=\frac{-4}{1+1}=-2$$

$y=x-2.$

Izquierda

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow b=\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+4}}-x\right)$$ haciendo x=-z

$$b=\lim_{z\to\infty}\left(-z\sqrt{\frac{-z}{-z+4}}+z\right)=\lim_{z\to\infty}z.\left(1-\sqrt{\frac{z}{z-4}}\right)=\lim_{z\to\infty}z\left(\frac{\sqrt{z-4}-\sqrt{z}}{\sqrt{z-4}}\right)=$$

$$=\lim_{z\to\infty}z.\left(\frac{-4}{(\sqrt{z-4}+\sqrt{z})\sqrt{z-4}}\right)=\frac{-4}{1+1}=-2$$

$z\to\infty$

$y=x-2.$