FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

1º.- Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} (x+3)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3} & x<-3 \\ e^{\frac{-1}{x^2}} & -3<x<0 \\ 0 & x=0 \\ x\ln x^2 & x>0 \end{cases}$$

Estudiar sus puntos de discontinuidad y clasificarlos

2º.- Sea: $y=\ln(5+3x)$. Hallar su derivada n-ésima

3º.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento, los extremos, las concavidades, los puntos de inflexión y las asíntotas de la función:

$$y=(x^2+1)e^x.$$

4º.- Hallar: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{\sqrt{4+\operatorname{sen}3x^2}-2}$.

Solución

1º.- $D = R - \{-3\}$, puntos conflictivos $x = -3, 0$.

$x = -3$.

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{h\to 0}[(-3-h)+3]\operatorname{arctg}\frac{1}{(-3-h+3)} = 0.(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{h\to 0} e^{\frac{-1}{(-3+h)^2}} = e^{\frac{-1}{9}}.$$

Es un punto de discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto finito.

Veamos $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} e^{\frac{-1}{(0-h)^2}} = e^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0}(0+h)\ln(0+h)^2 = 0(-\infty) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln h^2}{\frac{1}{h}} = L\'{}H\hat{o}pital = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h}}{\frac{-1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}(-2h) = 0.$$

Los límites coinciden y el valor de la función en dicho punto también es 0.

La función es continua en $x = 0$.

2º.- $y' = \dfrac{3}{(5+3x)} = 3(5+3x)^{-1}$ $\quad y'' = (-1)3.3(5+3x)^{-2}$ $\quad y''' = (-1)(-2)3.3.3(5+3x)^{-3}$

$$y^{IV} = (-1)(-2)(-3)3.3.3.3(5+3x)^{-4} \ldots\ldots\ldots y^{(n} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,3^n(5+3x)^{-n} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\,3^n}{(5+3x)^n}$$

3º.- D=R. $\quad y' = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (1+x)^2e^x$.

Signos de y' $\Rightarrow$ es positiva en todo R $\Rightarrow$ es creciente en todo su dominio $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ no tiene extremos.

$$y'' = 2(1+x)e^x + (1+x)^2e^x = (1+x)(2+1+x)e^x = (1+x)(3+x)e^x.$$

Signos de y '' $\begin{cases} (-\infty,-3) \text{positiva} \Rightarrow \cup \\ (-3,-1) \text{negativa} \Rightarrow \cap \\ (-1,\infty) \text{positiva} \Rightarrow \cup \end{cases}$

Como está definida en todo R $\Rightarrow$ los puntos $(-3,10e^{-3})$ y $(-1,2e^{-1})$ son puntos de inflexión.

Asíntotas.

No tiene verticales pues el dominio es todo R.

Horizontales:

Por la derecha $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(x^2+1)e^x = \infty$ .No tiene.

Por la izquierda $\Rightarrow$ $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x = \infty.0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{L´Hôp} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{-\infty} =$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0.$

La y=0 es asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas:

Por la izquierda ya tiene horizontal, veamos por la derecha

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)e^x = \infty.\infty = \infty \Rightarrow \text{No tiene.}$$

4º.-

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{\sqrt{4+\operatorname{sen}3x^2}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+\operatorname{sen}3x^2}+2)(e^{5x^2}-1)}{(4+\operatorname{sen}3x^2)-4} =$$

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{4+\operatorname{sen}3x^2}+2).\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{\operatorname{sen}3x^2} = \text{aplicando infinitésimos equivalentes} =$$

$$= 4.\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{3x^2} = \frac{20}{3}.$$