CALCULO

1º Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} - 1 & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

Hallar a y b para que la función sea continua en x=0 y tenga derivada en x=0.

2º Obtener el desarrollo de Maclaurin de la función:

$$f(x) = (1 + x)e^{-x}$$

3º Sea: $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Calcular en la forma más simplificada posible el valor de;

$$2f_{xx} + 2f_{yy} + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) f_{xy}.$$

4º Calcular: $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x} - x)}\,dx$.

5º Hallar: $\displaystyle\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy\,dz$.

Donde V son los puntos por encima de z=0, dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y fuera de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6º Poner los límites de integración en $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ e invertir el orden.

D es el dominio: $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \geq 1 \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \end{cases}$

Solución

1º

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cosh - 1}{h^2} - 1\right) = \text{Aplicando L'Hôpital al 1º sumando} =$$

$$= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0}\left(a(-h) + b\right) = b.$$

Para ser continua en x=0, b=-3/2.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\left[\frac{\cosh - 1}{h^2} - 1\right] + \frac{3}{2}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{\cosh - 1}{h^2} + \frac{1}{2}}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2(\cosh - 1) + h^2}{2h^3}\right) = \text{L'Hôp} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2\operatorname{senh} + 2h}{6h^2}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2\cosh + 2}{12h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2\operatorname{senh}}{12}\right) = 0.$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a(0-h) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{-h}\right) = a$$

Para tener derivada en x=0, a=0.

2º Hallando las derivadas sucesivas de f(x) en x=0 y sustituyendo:

$$(1+x)e^{-x} = 1 + 0 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3}{4!}x^4 + \frac{4}{5!}x^5 .... =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)x^n}{n!}$$

3º

$$f_x = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2};\ f_{xx} = \frac{4y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3};\ f_{xy} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_y = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2};\ f_{yy} = \frac{-4x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Operando $2f_{xx} + 2f_{yy} + \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)f_{xy} = 0.$

4º Con el cambio:

$$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3$$

$$\int \frac{t + t^2}{t^3(t^2 - t^4)} 4t^3 dt = 4\int \frac{-1}{t(t-1)} dt = 4\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= 4\ln\left(\frac{t}{t-1}\right) + Cte = 4\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 1}\right) + Cte = \ln x - 4\ln\left|\sqrt[4]{x} - 1\right| + Cte.$$

5º Pasando a coordenadas esféricas:

$$\iiint_V \frac{r\,\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{r^2\cos^2\beta}} r^2\cos\beta\, d\alpha\, d\beta\, dr = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\beta\, d\beta \int_1^2 r^2 dr = 2\pi.1.\frac{7}{3} = \frac{14\pi}{3}.$$

6º Puntos de corte:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} y = x \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow x = y = \dfrac{12}{5}. \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1} dx \int_{2\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int_{1}^{\frac{12}{5}} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{\frac{12}{5}}^{4} dx \int_{0}^{\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy.$$

Invirtiendo el orden:

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} dy \int_{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} f(x,y)dx + \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\frac{12}{5}} dy \int_{y}^{4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} f(x,y)dx.$$