CÁLCULO- RENOVABLES

1º.- Sea :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} & x<9 \\ \\ \dfrac{x-8}{(x-2)(x+2)} & 9\le x<10 \\ \\ \ln\left(\dfrac{x+2}{x^2-9x+10}\right) & x>10 \end{cases}$$

- **a)** Hallar el dominio de la función.
- **b)** Estudiar los puntos de discontinuidad y clasificarlos.

2º.- Dada la función: $z(x,y)=y.e^{y}.e^{\frac{x^2}{2y^2}}$.

¿Es cierta la igualdad $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$?.

3º.- Calcular: $\displaystyle\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

4º.- Hallar la longitud del arco de curva $y=\ln\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ comprendida entre los

valores x=0 y $x=\dfrac{1}{2}$.

5º.- Resolver:

$\displaystyle\iiint_V \left(x^2+y^2\right)^2 dx\,dy\,dz$ V está compredido entre $z=2$ y $2z=x^2+y^2$..

Solución

1º.- a) $D\left[\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}\right]=[-7,-2)\cup(-2,2)\cup(2,9).$

$D\left[\dfrac{x-8}{(x-2)(x+2)}\right]=[9,10)$**.**

$D\left[\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2-9x+10}\right)\right]=(10,\infty)$ pues $x^2-9x+10=0\Rightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{2}$ **,** estos

puntos están fuera del intervalo en el que nos lo han definido, lo mismo

que x=-2.

El dominio será: $[-7,\infty)-\{-2,\ 2,\ 10\}$

b) Estudio de los puntos de discontinuidad:

x=-7.

Será un punto de discontinuidad inevitable de 2ª especie pues no existe

el límite por la izquierda.

x=-2.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}\left(\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-3}{+0}\to-\infty.\\[3ex] \lim\limits_{x\to-2^+}\left(\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-3}{-0}\to+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=-2 \text{ punto de discontinuidad}$$

inevitable 1ª especie con salto infinito.

x=2.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(\sqrt{7+x}+3\right)\left(x^2-4\right)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{(x^2-4)}=\frac{1}{24}.$$

x=2 es un punto de discontinuidad “evitable”.

x=9.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 9^-} f(x)=\dfrac{\sqrt{16}-3}{81-4}=\dfrac{1}{77} \\ \lim\limits_{x\to 9^+} f(x)=\dfrac{9-8}{(9-2)(9+2)}=\dfrac{1}{77} \end{array}\right\} \text{tiene límite}$$

$$\text{y coincide con } f(9) \Rightarrow \text{es continua.}$$

x=10.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\dfrac{10-8}{(10-2)(10+2)}=\dfrac{2}{8.12}=\dfrac{1}{48} \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\ln\left(\dfrac{10+2}{100-90+10}\right)=\ln\dfrac{12}{20}=\ln\dfrac{3}{5} \end{array}\right\} \text{inevitable de 1ª especie}$$

con salto finito.

2º.- $$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\,\frac{2x}{2y^2}=\frac{x}{y}e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(e^y+ye^y)e^{\frac{x^2}{2y^2}}+ye^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{-x^2}{y^3}\right)=e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(1+y-\frac{x^2}{y^2}\right).$$

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left[\frac{x}{y}(x^2-y^2)+xy\left(1+y-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]=$$

$$=e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{x^3}{y}-xy+xy+xy^2-\frac{x^3}{y}\right)=e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}xy^2=\left(ye^y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)xy=z\,x\,y.$$

Es cierta.

3º.- El mcm (2, 5)=10.

Haciendo el cambio $x = t^{10} \Rightarrow dx = 10t^9 dt$.

$$\int \frac{10t^9 dt}{t^{10}(t^5+t^4)} = \int \frac{10 dt}{t^5(t+1)} = 10\int \frac{dt}{t^5(t+1)}$$

$$\frac{1}{t^5(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t^4} + \frac{F}{t^5} + \frac{G}{t+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,t^4(t+1) + B\,t^3(t+1) + C\,t^2(t+1) + D\,t(t+1) + F(t+1) + G\,t^5 = 1$$

$t = -1 \Rightarrow G = -1.$

$\text{coef}\,(t^5) \Rightarrow A + G = 0 \Rightarrow A = 1.$

$\text{coef}\,(t^4) \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -1.$

$\text{coef}\,(t^3) \Rightarrow B + C = 0 \Rightarrow C = 1.$

$\text{coef}\,(t^2) \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow D = -1.$

$\text{coef}\,(t) \Rightarrow D + F = 0 \Rightarrow F = 1.$

$$10\left(\ln t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} - \ln(t+1)\right) + \text{cte} =$$

$$= 10\left[\ln\left(\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}+1}\right) + \frac{1}{\sqrt[10]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt[5]{x^2}}\right] + \text{cte}.$$

4º.- $y = -\ln(1-x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1-x^2}(-2x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

$$1+(y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2+1} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}.$$

$$l = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right)dx =$$

$$= -x - \ln(1-x) + \ln(1+x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2} + \ln 3.$$

5º.- $\iint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} dz = \iint_D (x^2+y^2)^2\left(2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy.$

D es el recinto limitado por $x^2+y^2=4.$

Pasando a polares:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^2 r^4\left(2-\frac{r^2}{2}\right) r\,dr = 2\pi\left[\frac{2r^6}{6}-\frac{r^8}{2.8}\right]_0^2 = 2\pi\left[\frac{2^6}{3}-2^4\right] =$$

$$= 2^5\pi\left[\frac{4}{3}-1\right] = 2^5\pi\frac{1}{3} = \frac{32}{3}\pi.$$